UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

O Significado Epistemológico dos Diagramas na Construção do Conhecimento Matemático e no Ensino de Matemática

Rosa Monteiro Paulo

Orientadora: Profª. Drª. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Tese de Doutorado elaborada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática
e seus Fundamentos Filosóficos Científicos,
para obtenção do Título de Doutor em
Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2006

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo
- Orientadora –

Profa. Dra. Iole de Freitas Druck
USP/SP

Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira
UNICAMP/CAMPINAS

Prof. Dr. Claudemir Murari
UNESP/RIO CLARO

Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre
UNESP/RIO CLARO

Resultado: Aprovada

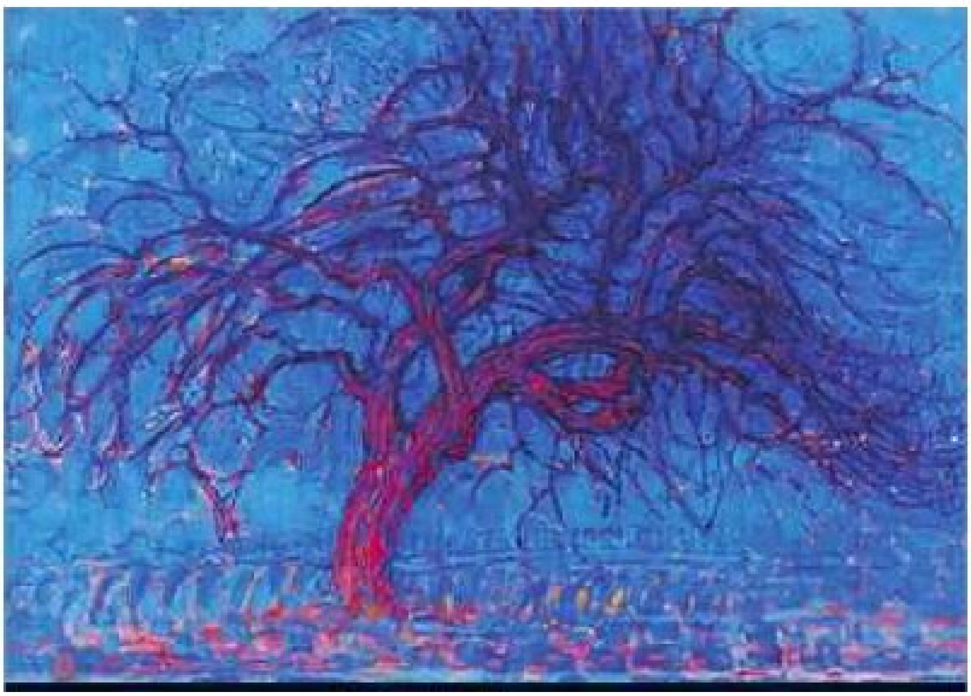
510 Paulo, Rosa Monteiro
P331s O significado epistemológico dos diagramas na construção do conhecimento matemático e no ensino de matemática. /Rosa Monteiro Paulo. - Rio Claro : [s.n.], 2006
192f. : il., tabs.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Maria Aparecida Viggiani Bicudo

1. Matemática. 2. Produção do conhecimento matemático. 3. Fenomenologia. 4. Geometria. 5. Educação matemática. 6. Diagrama. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

"A abstração exige que se olhe, ao mesmo tempo, para fora e para dentro, não procurando entender, mas aceitando o que se impõe ao nosso olhar a partir da anulação de todo o mundo reconhecível" (Alexandre Rodrigues da Costa).



Piet Mondrian (Árvore Vermelha)

Para os meus pais, Joaquim e Virginia
e meu esposo Eduardo

S U M Á R I O

Í N D I C E

R E S U M O

Esta pesquisa apresenta a investigação do *significado epistemológico dos diagramas na produção do conhecimento matemático e no ensino de matemática.* Conduzindo a pesquisa segundo a orientação fenomenológica, nos interessa compreender o tema investigado e expor os modos pelos quais ele é relevante para a Educação Matemática. Questionamos, inicialmente, o modo como as figuras são tratadas na literatura educacional. Porém, o processo de investigação ampliou as possibilidades de compreensão e nos encaminhou para a leitura de textos de Filosofia e Filosofia da Matemática. Nesse contexto encontramos uma distinção entre *figura* e *diagrama*. Compreendemos, no contexto histórico-cultural, como os diagramas foram relevantes para a produção do conhecimento matemático. Indagamos o significado dos diagramas no cenário da produção atual. Foram obtidas, das entrevistas, descrições de sujeitos que estão, em seu cotidiano, envolvidos tanto com a produção quanto com o ensino de Matemática. Da análise dos dados chegamos a três grandes regiões de convergências ou *categorias abertas* que expressam o modo como os diagramas são significativos: para o ***entendimento*** *de situações matemáticas, para a* ***busca de soluções*** *e investigação de situações matemáticas com vistas à generalização; como* ***recursos de linguagem*** *para comunicar o compreendido e produzido em Matemática.* Na análise hermenêutica dessas categorias, avançamos na direção de uma meta-compreensão da investigação e do seu processo, expondo a relevância do tema para a Educação Matemática.

Palavras Chave: Diagrama; Fenomenologia; Produção do Conhecimento, Matemático; Geometria; Educação Matemática.

ABSTRACT

This research work discusses the investigation of the epistemological meaning of diagrams on the production of mathematical knowledge and on the teaching of mathematics. Taking the research work on a phenomenological direction, it is our interest to understand the researched theme and to elucidate its relevant ways to Mathematics Education. We questioned, firstly, the way the figures are treated in the educational literature. But, the investigation process expanded the possibilities of comprehension and took us to the Philosophy and Philosophy of Mathematics literature. In this context, we found a distinction between figure and diagram. We understood, in the historical-cultural context, how the diagrams were relevant to the production of mathematical knowledge. We questioned the meaning of the diagrams in the scenery of actual production. It came out from the interviews, descriptions of the subjects who are, in their day by day, involved as much with production as with the teaching of Mathematics. It came out, from the data analysis, three large regions of convergences or open categories which show the way how the diagrams are meaningful: to the understanding of mathematical situations, to the seeking of solutions and investigation of mathematical situations towards generalization; as language resources to communicate the understood and produced in Mathematics. From the hermeneutics analysis of these categories, we got ahead towards a meta-understanding of investigation and its process, elucidating the relevance of the theme to the Mathematics Education field.

Keywords: Diagram; Phenomenology; Production of Mathematical Knowledge; Geometry: Mathematics Education.

R É S U M É

Dans cette recherche on montre l'étude sur *le signifié épistémologique des diagrammes pour la production des connaissances mathématiques dans l'enseignement des mathématiques*. La recherche a été mené selon la direction phénoménologique et ce qui nous a préoccupé, en particulier, c'était la compréhension du sujet de la recherche et nous voulons, encore, exposer le moyens qui le rend intéressant pour l'Education Mathématique. D'abord, nous avons questionné la façon comme les figures sont exploitées dans la littérature éducationnelle. Mais, les processus de la recherche ont amplifié les possibilités de compréhensión et nous a conduit à la lecture des textes de Philosophie et de Philosophie des Mathématiques. Ce dans ce contexte que nous avons rencontré la distinction entre *figure* et *diagramme*. Nous avons compris, dans le contexte historique-culturel, comment les diagrames ont été intéressants pour la production de connaissance mathématique. Ceci nous a conduit a nous demander sur le signifié des diagrammes dans le cenário de la production mathématique actuelle. Nous avons recueillit, dans les entretiens, les descriptions des personnes qui, dans leur quotidien, travaillent avec la recherche en mathématique or sur l'enseignement des mathématiques, L'analyse des dones nous a permis de repèrer tríos grands régions de convergence or des *catégories ouvertes* qui montrent que les diagrames sont significatifs: pour la **compréhensión** des *situations mathématiques*, pour la **recherche des solutions** et des situations mathématiques dont le but c'est la généralisation, comme un **langage** pour communiquer c'est qui a été compris et produit en Mathématique. Dans l'analyse herméneutique de ces catégories, nous avons avancé en direction d'une méta-compréhension de la recherche et de son processus en permettant d'exposer l'intérêt du sujet pour l'Education Mathématique.

Mots clés: Diagramme, Phénoménologie, Production de Connaissance, mathématicien, Gémétrie, Education Mathématique.

"A ponte é um lugar ... Esses lugares podem ser fixados como simples posições entre as quais subsiste um intervalo mensurável ... Enquanto intervalo temos um "*spatium*", ou seja, um espaço-entre ... Nesse espaço a ponte se mostra como uma coisa qualquer que ocupa uma posição ... mas isso só não basta. ... Os espaços que percorremos diariamente são "*arrumados"* pelos lugares ... O espaço nem é um objeto exterior e nem uma vivência interior. ...
Mesmo quando nos relacionamos com coisas que não se encontram numa proximidade estimável, demoramo-nos junto às coisas elas mesmas.

Vista do Caminho dos Filósofos

O que fazemos não é simplesmente *representar,* como se costuma ensinar, dentro de nós coisas distantes de nós, deixando passar em nosso interior e na nossa cabeça representações como sucedâneos das coisas distantes. Se agora – nós todos lembramos da antiga ponte de Heidelberg , esse levar o pensamento a um lugar não é meramente uma vivência das pessoas aqui presentes. Na verdade pertence à essência desse nosso pensar *sobre* essa ponte o fato de o pensamento poder *ter sobre si* a distância relativa a esse lugar. A partir desse momento em que pensamos, estamos junto daquela ponte lá e não junto a um conteúdo de representação armazenado em nossa consciência. Daqui, podemos, até mesmo, estar bem mais próximos dessa ponte e do espaço que ela dá e arruma, do que quem a utiliza diariamente como meio indiferente de atravessar os espaços ..."(Martin Heidegger. 2002.).

Capítulo I. Introdução

1.1. Da pré-ocupação à interrogação: expondo o movimento realizado

Holz (madeira, lenha) é um nome antigo para Wald (floresta).
Na floresta (Holz) há caminhos que, o mais das vezes sinuosos,
terminam perdendo-se, subitamente, no não-trilhado.
Chamam-se caminhos de floresta (Holzwege).
Cada um segue separado, mas na mesma floresta (Wald).
Parece, muitas vezes, que um é igual ao outro. Porém, apenas parece ser assim.
Lenhadores e guardas florestais conhecem os caminhos.
Sabem o que significa estar metido num caminho de floresta[*].
(Martin Heidegger, 2002)

Começar é sempre algo que gera insegurança e revela incertezas. As palavras iniciais parecem ser sempre aquelas que mais demoram a ser escritas e que menos nos soam familiares. O som de cada uma delas nos assombra como um eco que repete, incansavelmente, a necessidade de uma revisão. Parece que há tanto a ser dito e nada que esteja bom o suficiente. Achar o fio que conduzirá, sem embaraços, o deslizar da linha, parece uma tarefa insuportável.

A opção tem que ser feita. O início parece ser muito mais do que um simples *start.* Mas o alívio de que "*é só o come*ço" encoraja o escritor.

---

[*] Em nosso entender Heidegger usa *Wald* para falar de uma floresta de mata aberta, passível de ser percorrida pelo homem, enquanto *Holz* é usado para dizer de uma floresta de mata densa, praticamente impenetrável. Segundo nota do tradutor "O *Holzweg* é um trilho rodeado do não dominado, denso, angustiante, que pode acabar sem levar propriamente a nada, uma aporia. O meter-se por tais caminhos pode ser *siluiscere gehen zu sehr ins Holz* (embrenhar-se na floresta), *verwelderen* (tornar-se selvagem).
Os caminhos do mato, estreitos e sinuosos, mais que atravessá-los, levam quem o tenta fazer a descobri-lo como tal, embrenhando-se no seu interior sem saída. "Perder-se" por esses caminhos é, pois, encontrar a floresta, encontrar-se nela. Desse modo, justifica o tradutor, entrar num *Holzw* é descobrir-se com ela e nela". (Martin Heidegger. Caminhos de Floresta. Nota do Tradutor. 1998, p. IX).

Pensar ... parar ... escrever ... apagar .... recomeçar... parece que se encontra a primeira palavra: *motivação*. Ela é o que vem nos dar segurança para arriscar o começo. Falar do motivo que leva o pesquisador a realizar o seu trabalho é uma tarefa razoavelmente fácil, já que é o que, durante todo o processo, o acompanha. É também o que o leitor deseja saber: a pretensão da pesquisa que se expõe na escrita do texto final.

O que nos move na realização deste trabalho, o *motivo*, ou a motivação é o *interesse* em saber qual é a relevância dos aspectos visuais no contexto da Ciência Matemática.

Optamos, então, por começar explicitando esse *interesse* da pesquisa e o *caminho* que escolhemos trilhar para realizar a investigação.

O *inter-esse* consideramos importante explicitar por ser ele o que nos coloca *sob, entre e no meio das coisas;* [levando-nos a nela estar] *de permeio, e no meio dela persistir* (Heidegger, 2002, p. 113). O *interesse* é o que faz o pesquisador começar e permanecer na investigação atento aos detalhes, ávido por compreensões.

Já o *caminho* merece atenção por ser o que indica o *modo* pelo qual somos, estamos e permanecemos no meio do que é investigado. .

O interesse leva-nos a *querer compreender a natureza e a função da visualização em geometria.* Esta é a inquietação inicial que nos põe a caminho.

No caminhar a inquietação vai sendo questionada, vai expondo seus perfis, revelando suas ambições e, finalmente, encontra-se um modo de colocá-la numa frase interrogativa. A pergunta se estrutura, toma corpo e expõe-se com clareza. Ao expor-se ilumina e passa a dirigir o caminhar. Ela tem sentido e busca sentido. Tem sentido, uma vez que o perguntar espreita por uma fresta aberta pela experiência vivida. Busca sentido, já que almeja conhecer mais do que é sabido.

O querer saber mais é pensado a partir da experiência vivida. É um estar resoluto que se dispõe a ir além do existente, a abrir-se para as possibilidades que se mostram desde a vivência sem ficar no mero vivenciar.

O recurso às figuras no ensino de geometria é um tema que nasce como passível de tematização[1] em minha prática, no trabalho de sala de aula, portanto, na experiência vivida como professora de geometria, do curso de Licenciatura em Matemática, que vê, nas figuras, recursos disponíveis para que os alunos compreendam o enunciado de um problema e sejam capazes de acompanhar demonstrações.

No trabalho cotidiano de sala de aula, as figuras revelam, para mim, um sentido didático e se constituem num apoio à tarefa de ensinar geometria. Percebo, ao olhar atentamente para o fazer dos alunos, que as figuras são um apelo visual relevante para a atribuição de significados às situações geométricas.

Isso me leva a questionar a relevância das figuras, buscando por uma fundamentação teórica. Evidências da validade da utilização de imagens são encontradas, inicialmente, em textos que discutem a utilização de recursos para o ensino de geometria, especialmente na educação básica. Os desenhos são considerados como uma possibilidade disponível como recurso. Os diferentes trabalhos encontrados discutem as figuras e incentivam ou não seu uso didático, tecendo argumentações que me fazem compreender a intenção inicial. O caminho começa a ser trilhado e o desejo do que se busca vai tornando-se claro. A reflexão acerca de uma prática de sala de aula leva à investigação da validade de uma metodologia com fundamentos didáticos. A necessidade de compreender o sentido do recurso utilizado mostra o real interesse que acima apenas apontamos: *a natureza da visualização em geometria*.

Essa natureza, porém, não se restringe ao âmbito da sala de aula, embora ele seja o desencadeador. A investigação inicia-se com o fazer didático, questionando-o e buscando entendê-lo, mas caminha na direção da produção matemática. O objetivo do estudo e o caminho vão se mostrando no ato de caminhar. O querer saber sobre a visualização nos leva a questioná-la na própria construção do conhecimento matemático. A via didática vai se entrelaçando de maneira epistemológica e nos movemos da questão relativa ao ensino para a da produção em matemática.

[1] O sentido da palavra tematização, tal qual ele está sendo assumido neste trabalho, será explicitado com mais detalhe no decorrer do texto.

Busca-se uma análise crítica, tanto do que se faz na prática da sala de aula, quanto da atividade profissional do matemático.

As questões relativas à didática são abertura inaugural e apontam novos rumos e novas preocupações. As possibilidades de investigação vão se abrindo e interessa saber se as figuras são (ou foram) relevantes na produção do conhecimento matemático; se as figuras podem ser vistas como algo que possui mais do que uma validade didática; se as figuras auxiliam (ou auxiliaram) os matemáticos nos processos de construção da geometria que hoje é objeto de estudo no curso de matemática desde a educação básica até o ensino superior.

Nesse percurso, a paisagem vai se abrindo e mostrando o que procuramos: *investigar a natureza desses objetos - as figuras - e o sentido com que eles são vivenciados tanto na produção do conhecimento matemático quanto na aprendizagem dessa Ciência, e, como corolário, do seu ensino.*

1.2. As primeiras leituras: expondo o panorama geral em que vai se constituindo a compreensão do tema

O diálogo com os autores vai dando condições de refletirmos sobre a intenção da pesquisa e a inquietação inicial que nos motivou. Vai abrindo possibilidades de compreensão e favorecendo a exposição clara da pergunta que dirige o olhar, e nos leva a interrogar o fenômeno investigado.

As leituras iniciais foram aquelas do contexto didático, isto é, aquelas que falam das figuras ou dos recursos visuais para o ensino de matemática. Essa opção tem um fundamento na própria origem da inquietação: o querer saber sobre as figuras nasce na realidade vivida em sala de aula, na vivência de professora. Portanto a opção privilegia o *querer saber* nascido na experiência vivida.

Alguns autores com os quais iniciamos os diálogos nos trazem contribuições, tanto para a compreensão do que é investigado, como para o próprio processo de investigação. São essas compreensões refletidas e interpretadas que trazemos no texto de nosso trabalho articulando nossa inquietação.

No livro "*aprendendo e ensinando geometria*", por exemplo, há, no capítulo 2[2], uma discussão relativa ao problema do desempenho dos alunos em geometria e ressalta que é preciso que o currículo reflita as *diferentes visões* que se pode ter dessa disciplina para que ela seja compreendida pelos alunos. Essas diferentes visões o autor denomina "*dimensões*" do conhecimento geométrico. Uma delas diz respeito "à geometria como estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras" (Lindquist, 1994, p. 32) e propõe um trabalho em sala de aula que considere a construção de figuras, inclusive com régua e compasso, bem como as possibilidades de transformações, quer por reflexões, translações, rotações ou variação de tamanhos (semelhança) que possam vir a auxiliar na construção de relações entre figuras e suas propriedades.

Esclarecemos que, nessa obra, os autores não propõem uma primazia da figura. Ou seja, não há uma defesa de que a geometria seja entendida apenas no seu aspecto visual, fato que implicaria uma proposta de atividades que permitam identificar, por exemplo, o retângulo, por sua aparência.

Há uma defesa da significação que as figuras podem favorecer quando exploradas na sala de aula.

Hoz (1979) escreve, também, a favor da visualização. Ele destaca que a visualização desempenha um papel muito complexo na formação de conceitos geométricos e que não se pode pautar uma aula de geometria na "*rigidez perceptiva*". Ou seja, segundo ele, há autores que consideram a percepção enganosa e, portanto, algo que deve ser evitado para que o aluno não corra o risco de ter sua habilidade para efetuar provas e demonstrações afetada pela falácia perceptiva.

Fainguelernt[3] afirma que é consenso, entre os educadores matemáticos, que "a visualização é importante porque, além de ampliar uma visão intuitiva e global; facilita a compreensão de outras áreas da Matemática" (Fainguelernt,

---

[2] Usiskin, Zalman. *Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar*. In: Lindquist, Mary Montgomery & Shulte, Alberto P. (org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 21-39.

[3] Fainguelernt, Estela Kaufman. Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

1999, p. 56). A autora cita diferentes pesquisadores e pesquisas efetuadas com a finalidade de mostrar a importância da visualização na construção do conhecimento geométrico. Destaca a necessidade de se desenvolver uma educação visual para que se possa acompanhar a evolução tecnológica, mais especificamente da computação gráfica, que hoje influencia nosso cotidiano. Fainguelernt diz que a geometria deve ser trabalhada, nos primeiros anos da escolarização básica, como uma ciência empírica que favoreça o desenvolvimento das "relações que o aprendiz pode estabelecer com o espaço que o envolve, possibilitando a construção de um caminho que o ajudará a fazer a passagem do estágio das operações concretas para o estágio das operações abstratas" (idem, p. 51).

Para fundamentar sua afirmação ela traz Hershkowitz (1994) dizendo que

> "o ensino de Geometria parte da visão da mesma como exploração e descrição do espaço, trabalhando concretamente no espaço real e realizando diferentes atividades que desenvolvem a visualização, a intuição, a percepção e a representação, além de permitir que o aprendiz realize a passagem do espaço real para o espaço teórico, chegando à visão da Geometria como uma estrutura lógica" (idem. Ibidem.).

Com um discurso muito semelhante, seguem os Parâmetros Curriculares Nacionais (P.C.Ns) do Ensino Fundamental. Ao discutir os conteúdos de matemática propostos para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries), esse documento enfatiza a necessidade de que o professor desenvolva um estudo do espaço e das formas, privilegiando a observação e a compreensão de relações em figuras bidimensionais e tridimensionais. No documento, é destacado que um aspecto merecedor de consideração nessa fase da escolaridade é o que diz respeito ao ensino de procedimentos para construção de figuras usando régua e compasso já que o uso desses instrumentos permite que o aluno estabeleça relações entre as propriedades geométricas das figuras que estão sendo construídas.

Ao tratarem dos conteúdos relativos ao *Espaço e à Forma* para o 4º ciclo do ensino fundamental (7ª e 8ª séries), é destacado, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que esses temas devem ter "como ponto de partida a análise de figuras pela observação, manuseio e construção que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades" (1998, p. 86) bem como se deve valorizar a construção de figuras a partir das transformações geométricas: reflexões, translações, e rotações, dado que essas simetrias "permitem ao aluno perceber que, pela composição de movimentos, é possível transformar uma figura em uma outra" (idem ibidem) e compreender o sentido de semelhança. É ressaltado que o trabalho com movimento de figuras permite que o aluno estabeleça "conexões com outros conteúdos matemáticos, como razões e proporções, propriedades de figuras, ângulos, medidas (áreas, volumes) e conteúdos de outras áreas (artes, educação física, ciências, geografia, física)" (idem ibidem). Já no que diz respeito à representação de figuras espaciais, os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam como "funções principais do desenho: visualizar - fazer ver, resumir; ajudar a provar; ajudar a fazer conjecturas (o que se pode dizer)" (idem, p. 125).

Seguem, nesse documento, justificativas para o fato de que representar um objeto geométrico a partir de um desenho faz com que o aluno busque "uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizem o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto" (idem ibidem).

Nesse momento da leitura, procuramos compreender alguns aspectos destacados tais como: "o que se intenciona ao se falar das relações que podem ser estabelecidas entre a *representação e as propriedades do objeto representado*?"; "O que são as imagens mentais que o aluno tem do objeto?"; "Como os alunos passam da imagem mental à representação ou ao objeto?".

Essas dúvidas foram suscitadas ao final da leitura dos Parâmetros Curriculares. Mas, também, nesse movimento de busca do sentido daquilo que é expresso nos documentos oficiais, chama-nos a atenção um outro ponto: a formação do professor de matemática. Perguntamos: "como, no curso de formação de professores de matemática, esses aspectos são considerados de modo que sua ação em sala de aula possa atender ao que é exigido nos documentos oficiais ou mesmo colocá-los sob suspeição, em uma atitude de análise e crítica?".

Mudamos a direção do nosso olhar na tentativa de compreensão dessa perspectiva que se abre. Voltamo-nos para a leitura dos documentos oficiais que norteiam os cursos de licenciatura em Matemática. Nas diretrizes curriculares do Ministério da Educação e Cultura, as menções às disciplinas que devem compor a grade curricular do curso não são explicitadas de modo a que se possa entender como serão desenvolvidas as competências que são requeridas do futuro professor. A metodologia ou a abordagem dada aos conteúdos fica a critério das Instituições de Ensino Superior. Há apenas linhas gerais que traçam os temas a serem objeto de discussão dos cursos de formação de professores.

Já no documento elaborado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) com o objetivo de subsidiar a discussão das propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática[4], é ressaltado que as Instituições de Ensino Superior, ao elaborarem os projetos pedagógicos de seus cursos de formação docente, devem atentar para a necessidade de haver uma "interação entre os três componentes da Matemática: o formal, o algorítmico e o intuitivo" (p. 09). É destacado, também, que as diferentes disciplinas oferecidas no curso devem se valer de variadas "representações semióticas para uma mesma noção Matemática... transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas e outras" (idem ibidem).

No que diz respeito aos conteúdos específicos do curso de formação de professores de Matemática nesse documento, é ressaltado que algumas disciplinas como, por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral (C.D.I.), constituem-se em rica fonte de trabalho com diferentes representações. Já a geometria é apontada como a disciplina que mais propicia a visualização, construção e o trabalho com medidas, além de ser vista como uma linguagem que favorece a representação de outros conceitos matemáticos e a compreensão de sistemas axiomáticos.

Em documento redigido pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com a finalidade de subsidiar as Instituições de Ensino Superior na elaboração dos projetos pedagógicos de seus cursos, é salientado que, no que diz respeito à geometria, os cursos devem procurar trabalhar de modo que o aluno adquira uma

[4]Documento síntese do Fórum Nacional de Licenciatura em Matemática, promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nos dias 23 e 24 de agosto de 2002, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

familiaridade com a axiomática da geometria euclidiana, pois é este um ótimo espaço para exercitar diferentes métodos de demonstração. Não há, nesse documento, menção às questões relativas à representação de objetos mas há, em contrapartida, um alerta para que os cursos não se esqueçam de que é fundamental um estudo na Geometria que evidencie "as construções geométricas com régua e compasso e suas conseqüências no desenvolvimento da Matemática" (p. 14).

Esse breve percurso nos fez perceber a riqueza da investigação que as intuições iniciais, dadas na vivência refletida em sala de aula de geometria, nos mostra. A aparência revela-se num cenário da sala de aula onde as figuras têm um certo apelo. No caminho, a aparência se inverte. Na própria busca pela compreensão, a real inquietação se desdobra. O caminho da didática se bifurca e nos leva para a direção da epistemologia. A curiosidade que nos fez olhar para o ensinar e aprender geometria mostra-nos o que não está escrito nos livros didáticos e nos documentos oficiais. É a partir do caminhar, das possibilidades que ele oferece que se mostra a pergunta que passa a orientar a busca. *A intenção que se revela no movimento de perseguição à pergunta, embora ainda num nível de ingenuidade científica, indica a busca pela compreensão e interpretação dos significados que as figuras revelam na produção do conhecimento geométrico.*

Orientamos nossas leituras na direção indicada pela busca de uma literatura na qual seja possível compreender as figuras no contexto da produção matemática. Perguntamos, então, ainda de modo não temático, "*qual seria a contribuição das figuras na construção do conhecimento matemático?*".

Para nós, essa busca vai fazendo sentido à medida que temos a intenção de compreender o domínio da geometria tal como ela nos é apresentada hoje em sua forma axiomática.

Com as primeiras leituras em Filosofia da Matemática, ao iniciarmos esta investigação, deparamo-nos com algo desconhecido: *os diagramas*. Vimos que o que estamos chamando de *figuras*, na matemática grega, por exemplo, aparecem como *diagramas* e estão sempre ligados à própria construção do conhecimento. Entendemos que o matemático da Grécia antiga usava os diagramas para comunicar o movimento do pensar, tanto para si, quanto para o outro. O diagrama lhes permitia re-fazer o caminho da descoberta ou apoiar-se nas etapas da sua construção para novas descobertas.

Nessas leituras iniciais, intrigou-nos o fato de que o que identificamos usualmente como *figuras*, inclusive em seu aspecto visual, era chamado de *diagrama*. Haveria um motivo para que as figuras fossem usadas pelos gregos como diagramas? Por que diagramas? O que são? Surge nossa primeira inquietude com a leitura. Somos levados a procurar esclarecimento para essas questões.

Antes de prosseguirmos com a investigação em busca do esclarecimento do significado dos diagramas, sentimos a necessidade de compreender porque, na literatura que trata da importância do aspecto visual no ensino e aprendizagem da geometria, somos remetidos ao recurso das *figuras*, sejam elas simples manipulações, dobraduras ou construções com régua e compasso e na Filosofia da Matemática aparecem os *diagramas*. Seria apenas uma mudança de nomenclatura, ou seus significados revelariam um contexto significativo à compreensão do que buscamos elucidar?

Com essa dúvida, iniciamos uma busca pelos sentido e significados da palavra *diagrama* no contexto da Filosofia da Matemática, recorrendo à via histórico-filosófica para ver se há apenas uma mudança de termo ao longo dos tempos, ou se a mudança é de conceito.

Capitulo II. A trajetória de investigação: trazendo o diálogo com os autores.

2.1. Palavras iniciais sobre as leituras de natureza histórico-filosófica

Neste capítulo, vamos nos deter na interpretação das leituras que fizemos para tematização do assunto investigado.

Entendemos que isso é importante para esclarecer por que o pesquisador que assume a fenomenologia como postura investigativa envolve-se num diálogo com a literatura.

A pesquisa fenomenológica inicia-se com uma inquietação. Há um conhecimento prévio de um tema advindo do nosso modo de nos relacionarmos com ele na experiência vivida.

Esse conhecimento inicial é importante para o próprio perguntar, pois, "para perguntar apropriadamente já é preciso conhecer o assunto", diz Heidegger (2001, p. 64). Mas, se já conheço o assunto, porque querer investigá-lo? Essa é uma questão pertinente.

Para respondê-la, trazemos uma citação do próprio Heidegger, que acreditamos expressar o motivo que nos leva a investigação.

> "Toda relação de pergunta e resposta move-se inevitável e constantemente em círculo. Só que não é um círculo vicioso, um círculo que deveria ser evitado por ser supostamente errado. Antes, o círculo pertence à essência de todo perguntar e responder. É possível que eu já tenha um conhecimento daquilo pelo que pergunto, mas isto não quer dizer que eu já reconheci aquilo que pergunto, reconheci no sentido de ter apreendido e determinado tematicamente" (*idem ibidem*).

Ou seja, a intenção do pesquisador fenomenólogo é tematizar aquilo que deseja investigar buscando compreender. Para que essa compreensão se dê, o pesquisador deve deixar de lado o que acredita saber sobre o tema e o modo como está acostumado a lidar com ele. Isso se faz necessário para que o assunto investigado possa ser questionado, e não por ser julgado que o que é sabido é falso ou infundado.

Pode-se dizer que, para começar, toda investigação fenomenológica organiza-se num esclarecimento prévio da relação cotidiana do pesquisador com o assunto a ser pesquisado e que busca ver os fenômenos que se mostram sem explicá-los ou tirar conclusões. Ao proceder uma investigação numa postura fenomenológica, "se deve manter o olhar que pensa aberto para o fenômeno" (idem p. 91) e, ao tematizar, o que deseja compreender, o pesquisador se coloca numa postura de diálogo onde o ouvir é tão importante quanto o dizer.

O pesquisador dialoga com os autores que falam sobre o tema buscando compreender o assunto que está investigando de modo mais profundo e também apropriado. Não se trata de uma postura de assumir o dito como uma "verdade teórica", mas de dialogar com os textos, de modo argumentativo.

Orientado por um *sentido*, ou seja, pelo conhecimento imediato do fenômeno a ser investigado e pelos critérios de rigor da pesquisa, o pesquisador procede a sua investigação, lança-se num caminho que vai sendo construído e dirigido pelos significados atribuídos ao que está sendo pesquisado. Trava um diálogo procurando tematizar, compreender e interpretar o que se relaciona com a sua intuição inicial.

Em nossa pesquisa, para compreender o significado dos diagramas na produção do conhecimento matemático, procuramos um diálogo inicial com autores de filosofia, história e filosofia da matemática na tentativa de tornar claro o que está sendo perguntado.

2.2. Um percurso histórico na busca da elucidação das figuras e compreensão do sentido dos diagramas

2.2.1. Bento de Jesus Caraça, um educador eminente

Já, em vários momentos anteriores, falamos de opções: por quê?

Toda busca pressupõe opções e toda opção carrega consigo uma escolha, já que é abertura de possibilidades[5]. Desde o início da investigação, quando somos dirigidos por nosso desejo de querer saber, já elegemos uma via de abertura ao que temos a intenção de compreender. Fazemos uma opção metodológica, ainda que em nível pré-predicativo, que nos dirige o olhar e nos guia no movimento do pensar[6]. Não questionamos a validade de outras vias, nem tampouco assumimos as afirmações feitas em nível predicativo como verdades absolutas. Apenas as consideramos quando satisfazem nossa busca, dando-nos a oportunidade de compreender o que é investigado.

Assim, fazemos também com nossas opções de leitura. Na via escolhida para o conhecimento histórico-filosófico, selecionamos autores que possam nos fazer sentido e lançar luz à nossa busca.

Bento de Jesus Caraça foi uma das escolhas feitas com base nessa compreensão. Vimos, em sua obra, uma possibilidade de compreensão daquilo que investigamos aliando a via didática aos aspectos históricos. Por ter esse autor um estilo de ensino da matemática inédito para a época[7], caracterizado por um grande poder de comunicação e uma pedagogia baseada em compreensões sobre a condição humana e a condição da cultura, ele foi considerado um pioneiro

---

[5] Em Heidegger, a *abertura* indica *disponibilidade para*... refere-se ao estado constante de projeção em direção as possibilidades que estão sendo despertadas. O "estar aberto" é um "vir ao encontro". A "abertura de possibilidades" é usada aqui, com a intenção de indicar *opções* e *disponibilidade* do sujeito que intenciona trilhar os caminhos que lhe são abertos. É o "vir ao encontro" desses caminhos e percorrê-los.

[6] "O pensamento é uma *apresentação* do que está presente que entrega o que é vigente em sua vigência. /.../ o pensamento libera o que é vigente na relação conosco, ele o põe de volta para nós" (Heidegger, 2002, p. 123).

[7] A época a que nos referimos é a década de 40, quando da 1ª edição da obra em que aqui nos ocupamos.

no desenvolvimento da atividade matemática portuguesa e é, ainda hoje, uma referência.

Já no prefácio de seu livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, declara que pretende tratar a Matemática tal qual ela foi sendo elaborada deixando-a expor-se "como um *organismo vivo*, impregnado de *condição humana*, com as suas forças e as suas fraquezas" (Caraça, 2000. p. xxiii).

Interessou-nos no livro, especialmente, o modo como Caraça traz o pensar grego, revelando-o como sendo influenciado pela filosofia platônica e pelos momentos de crise. Essas crises eram decorrentes do domínio dos persas e romanos e o modo de pensar, nessa cultura, foi invadido por um "horror à transformação". Desse horror, resulta também o "horror ao movimento, ao material, ao sensível e ao manual" (id. p. 178) que expõe o cenário no qual sua Ciência é desenvolvida.

Caraça busca tornar claro que, nas raízes do pensamento platônico, está a concepção de que

> "a realidade não está nas coisas sensíveis, [mas sim] está nas Idéias ou Formas: bom, belo, justo, grandeza, força, etc, as coisas sensíveis não são mais que imagens ou cópias das Formas, a verdade não pode, portanto, adquirir-se pelo exame por meio dos sentidos, do universo exterior sensível, mas apenas pelo pensamento puro, pela actividade da alma, isolada do corpo; este não faz mais do que perturbá-la, impedi-la de pensar" (idem p. 174).

Caraça defende, portanto, a idéia de que essa visão impõe à Ciência Grega dos séculos V e IV a.C. um modo de agir que culmina com a rejeição do manual e do mecânico como formas de Cultura. Na Matemática, afirma, isso impede, por exemplo, a construção do conceito de variável, já que esse conceito não guarda em si a identidade. Impossibilita a Ciência Grega de fazer um estudo quantitativo dos fenômenos naturais, prevalecendo um estudo meramente qualitativo, dado que a forma é capaz de guardar a sua identidade. Estabelece-se um primado da forma. Essa exigência pela "*guarda da identidade*" exclui dos domínios da geometria o movimento. A geometria lida com as formas estáticas e, esse caráter estático se revela em várias situações. Por exemplo, nos enunciados de Euclides.

Caraça, nessa obra, tece uma trama de considerações que possibilitam ao leitor compreender esse caráter que ele denomina de estático.

Consideremos duas das definições de Euclides para compreender essa concepção de Caraça.

Definição 4: " linha reta é a que jaz, por igual, com seus pontos sobre si mesma" (Bicudo, 2001. p. 09).

Não poderíamos encontrar em Euclides a possibilidade de a reta abranger a idéia de ser o caminho mais curto entre dois pontos, já que isso pressupõe o movimento e, para os gregos, "o processo dinâmico de descrição não é suficientemente digno para gerar uma figura geométrica" (Caraça, 2000. p, 183).

Definição 15: "circunferência é uma linha, em relação a que todas as retas que caem sobre si, a partir de um ponto, dos jazentes no interior da figura, são iguais entre si" (Bicudo, 2001. p. 09). Novamente não seria possível encontrar em Euclides, ou na Geometria Grega, a circunferência como "uma linha descrita por um ponto que se move num plano conservando-se a uma distância fixa dum ponto desse plano" (Caraça, 2000. p. 185).

Caraça diz que essas características que excluem do bojo da Ciência Matemática tudo que está ligado às concepções quantitativas e dinâmicas mantém-se durante quase duas dezenas de séculos, começando a transformar-se apenas a partir do século XI, quando se inicia o debate entre o filósofo chamado tradicional, seguidor da doutrina platônica, para quem a verdade está no pensamento e na lógica, e os filósofos "novos" que acreditam que a verdade é descoberta primeiro pela experimentação para depois ser elaborada no pensamento.

Para ele põe-se, novamente, uma questão de primado: a razão ou a experiência? Caraça mostra-nos que, desse novo modo de “filosofar”, renasce, como que das cinzas, o antigo ideal de ordenação matemática quantitativa, conservando, sim, um primado, agora do número em relação à forma, pois é o número que constitui o fundamento do conceito de variável.

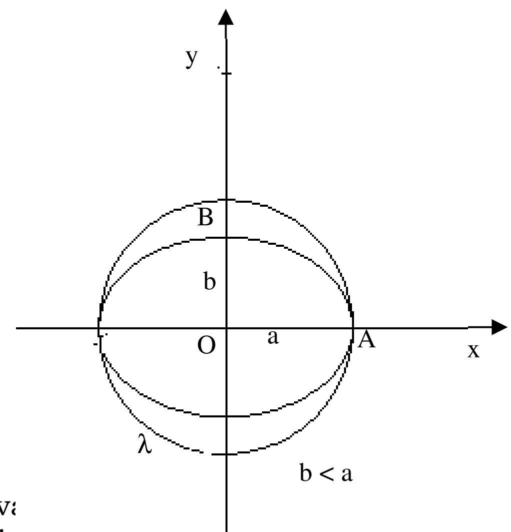
Mas, continua a argumentar o autor, se há um primado do número em relação à forma, é porque o número é capaz de explicar ou esclarecer a forma, ou seja, é porque os aspectos qualitativos podem ser justificados quantitativamente.

Consideremos um exemplo dado por Caraça para que possamos compreender como o número permite explicar a figura em sua forma e dimensões.

Tomemos a equação,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que representa uma elipse (β) de semi-eixos *AO = a* e *OB = b*, com *b < a*.



Consideremos uma variação no valor de b de tal modo que,

> "b cresce e se aproxima de a. A cada va elipse com os semi-eixos a e b_i. À medida que b_i se aproxima de a, a elipse vai sendo cada vez menos diferente duma circunferência (λ) de centro O e raio AO mas é sempre uma elipse. Se, no entanto, b atingir, na sua variação, o valor *a*, para esse valor ter-se-á $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad donde \quad x^2+y^2=a^2$, isto é, não se tem já uma elipse mas a circunferência, curva essencialmente diferente na sua *forma*. /.../ uma variação de *qualidade* – a forma duma figura – se explica por uma variação de quantidade. /.../ O primado do número atinge aqui toda a profundidade de seu significado!" (Caraça, 2000, p. 193).

Entende-se, com as argumentações que se seguem no livro que, nesse solo, nasce a geometria analítica: o número, que é a base da equação, é o que permite explicar tanto a figura em sua forma e dimensões quanto a variação da qualidade (forma) pela variação da quantidade. Com Descartes[8], as curvas

[8] Optamos, aqui, por mantermos a referência fiel ao que lemos em Caraça tendo em vista que trazemos suas idéias para discussão no texto. No entanto, em Howard Eves, por exemplo, temos informações de que "ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, o assunto também ocupava a atenção e outro gênio matemático francês, Pierre de Fermat. /.../No artigo *Isogoge ad lócus planos et sólidos*, ... encontramos a equação geral da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérboles, elipses e parábolas". (Howard Eves, 2004, 389).

passam a ser descritas por uma equação, por uma lei matemática, que comporta tanto a forma quanto as dimensões, ou seja, as curvas são, então, representadas por expressões analíticas.

Caraça mostra-nos, porém, como o conceito de função é excessivamente amplo, ou seja, como para "o objetivo geométrico da definição da curva, o conceito de função na sua maior generalidade, é um quadro largo demais" (id. p. 196) e precisa ser restrito para que as imagens, das funções obtidas, sejam coerentes com nossa noção intuitiva de curvas.

Ao fazer isso, o autor chama a atenção para o fato da necessidade, expressa no decurso da história, que se tem de ir daquilo que nos é dado na intuição para o que a razão nos permite conhecer, questionando o afastamento da condição de origem, ou do nascimento do conceito.

Essa chamada do autor nos traz de volta a nossa questão e nos faz perceber que, ao interrogarmos as figuras, interessados no seu significado epistemológico, buscamos uma compreensão da construção do conhecimento matemático que hoje é exposto nos livros didáticos de diferentes níveis de escolaridade. A leitura de Caraça nos faz ver, mais uma vez, as figuras, especialmente na geometria grega, como elementos estáticos que desprezam o movimento. Embora nesse autor não tenhamos encontrado uma referência no que diz respeito à concepção de diagrama, que aparece na filosofia da matemática, ele nos permite compreender a visão do educador, que busca explicitar o contexto sócio-histórico-cultural em que o conhecimento é produzido.

2.2.2. Lancelot Hogbem e a visão crítica da matemática

As Maravilhas da Matemática (Hogbem, 1946) é outra obra que nos chama a atenção por motivos similares aos da escolha de Caraça. Ou seja, numa época em que a discussão sobre o que hoje se chama de *"matemática crítica",* ainda era pequena, esses autores expõem modos de pensar que levam às reflexões de práticas sociais e ampliam o contexto da matemática para a compreensão do mundo em que vivemos.

No prefácio desse livro, Hogben anuncia não ter a pretensão de ser tomado como especialista e esclarece que escreve essa obra "na qualidade de cidadão particular interessado no problema educacional" (Hogben, 1946. Prefácio, s.p), tendo como objetivo "estimular o interesse e remover o complexo de inferioridade de alguns dos milhões que já desistiram de aprender matemática pelos trâmites costumeiros" (idem ibidem).

Tanto quanto Caraça, Hogben nos traz, em seu estilo peculiar e crítico, um panorama da geometria grega. O que Caraça nos diz ser desprezado na geometria grega - o movimento, Hogben diz do tempo.

Para esse autor, a geometria grega, por se originária "da prática de desenhar na areia e de construir coisas permanentes, tais como edifícios e navios /.../ não levava em consideração a existência do tempo. Suas linhas, ângulos e figuras eram todos fixos". (idem p. 124). Porém, ele argumenta: "não há nada de tão sólido que possa permanecer tal como é" (idem ibidem), portanto, somos levados a pensar que o motivo que tinham os geômetras gregos para agirem desse modo relaciona-se apenas à sua vivência. Ou seja, eles não estavam acostumados a presenciar variações radicais de tempo e suas medições do espaço eram completamente dissociadas da medida do tempo. Além disso, o fato de a geometria estar desvinculada das práticas sociais e ser um "passatempo de intelectuais" (idem p. 190), impossibilitou descobertas notáveis. Na base de tudo isso, estava a forte influência da filosofia platônica, que considerava a geometria um instrumento de perfeição de tal modo que "a régua e o compasso eram os únicos instrumentos que o geômetra devia usar no traçado de suas figuras" (idem p. 191). No auge da geometria grega, onde isso era seguido rigorosamente, aqueles que criavam novos instrumentos para traçar curva, por exemplo, tinham sua iniciativa desprezada.

Percebemos, nesse ponto da leitura de Hogben, a interseção com as idéias de Caraça. O fato de os gregos admitirem a reta, a circunferência e as cônicas apenas, desprezando o mecânico e o manual ligava-se ao fato de não admitirem instrumentos outros que não fosse a régua e o compasso. O caráter estático das figuras de Euclides, destacado por Caraça, aparece em Hogben como figuras que se pretendem fixas, imutáveis, mesmo após a ação do tempo.

Para Hogben o movimento é expresso apenas se considerarmos a ação do tempo, pois

> "as mais simples estimativas sobre o comprimento de uma linha, envolvem movimentação dos músculos dos olhos. Dependem, pois, do tempo e do espaço. /.../ Nos mundos reais da biologia [por exemplo], tamanho e movimento são entidades inseparáveis" (idem p. 126).

Mas Hogben adverte-nos para o fato de que embora "nossa geração (referindo-se a década de 40) esteja presenciando uma verdadeira revolução no conceito clássico de geometria" (idem p. 122) e estejamos vendo que "a geometria de Euclides não é a que melhor nos facilita a medição do espaço, isso não quer dizer que não seja, ainda, um conhecimento útil. Sempre o foi e ainda o é" (idem p. 123).

Essa afirmação de Hogben talvez possa ser justificada, em nosso entender, pelo que ele diz logo no início de seu livro a respeito da linguagem matemática. Para ele,

> "a literatura matemática inicia-se com a linguagem pictórica ou hieroglífica que chamamos geometria. Com o passar dos anos, a geometria se foi desenvolvendo, de uma maneira que faz lembrar a evolução da língua chinesa. As figuras foram primeiramente usadas como **diagramas**, **para representar formas, superfícies e volumes**[9]. Depois, serviram de gráficos, para a solução de problemas aritméticos. Só muito tempo mais tarde, o homem, renunciando ao uso exclusivo de figuras para o registro da conduta dos números, começou a usar letras e a compilar dicionários, verdadeiros catálogos da significação das palavras usadas. Esses dicionários são chamados tábuas" (id. p. 76-7).

[9] Grifos da pesquisadora.

Percebemos, então, o movimento que Hogben presencia na construção do conhecimento geométrico. Ele nos faz perceber um primeiro contexto que associa a figura aos diagramas. Parece-nos que a palavra *figura* sofre uma variação de sentido segundo o contexto em que está sendo usada enquanto que os **diagramas** são figuras que expressam grandezas geométricas. E, mais do que essas compreensões, que a princípio era nosso interesse, vêm-se, com a leitura desse autor, a importância de se olhar para a construção histórica do conhecimento geométrico, que coloca em destaque o que Caraça nos diz no início do seu livro e que já citamos anteriormente, a saber, que *a matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana e sujeita a sua força e fraqueza.*

2.2.3. Uma incursão pela Filosofia da Matemática e a explicitação do que é investigado

Nosso primeiro contato em Filosofia da Matemática foi com a obra "*The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*" (Netz[10], 1999), onde buscamos compreender o sentido que as palavras *figura* e *diagrama* poderiam assumir. Já de início, entendemos que essa mudança não se refere apenas à nomenclatura. *Figuras* e *diagramas* assumem concepções diferentes.

Na leitura de Netz pudemos ir além do que nos disse Hogben, já que ele trabalha o sentido da palavra. Ele nos diz que nossa palavra diagrama deriva do grego *diagramma* cujo principal significado é "*figuras marcadas por linhas*".

Os gregos usavam os diagramas em diferentes contextos e com diferentes sentidos.

[10] Apresentaremos, na seqüência do texto, esse autor e sua obra.

Platão usa freqüentemente o termo *Diagramma* como prestigio para provas matemáticas ou como acompanhando o rigor matemático.

Aristóteles usa *diagrammata* (o plural de diagramma) praticamente como sinônimo de matemática ou como significando "*uma proposição matemática*". Sócrates usava com seus jovens alunos de geometria, não os ininteligíveis *diagrammata*, e, com isso, podemos pensar que eles seriam muito mais do que hoje entendemos por diagramas.

A palavra *diagramma*, segundo Netz, nunca era usada pelos gregos no sentido de "diagram" (figura). Quando eles queriam enfatizar que as proposições estavam relacionadas a "diagram" (figuras), eles as caracterizavam por "dia grammõn", por meio de linhas, em oposição a outra opção "di arithmõn", por meio de números.

Pappus, diz Netz, usa *diagramma* como um simples equivalente da nossa proposição. Em alguns casos, quando ele refere-se ao *diagram* (figura) na proposição, ele usa *hupographe*, um derivado da palavra *Katagraphe*, melhor traduzida por "desenhado". No entanto, nenhuma dessas palavras tem o sentido de *diagrama*, tal qual os gregos a utilizavam. A palavra *diagrama* era reservada para significar "*aquilo que uma proposição é". Diagramma* é, para os gregos, um metônimo de proposição. Isto é tão forte que, quando queremos fazer uma referência ao diagrama, que não a proposição, temos que usar um outro termo mais específico.

Voltamo-nos, mais uma vez, para nossa intenção investigativa e interrogamos; *qual o nosso desejo ao questionar o significado epistemológico dos diagramas na construção do conhecimento matemático*?

Não queremos estudar se existe a possibilidade de as figuras, ou imagens, serem utilizadas como provas de teoremas ou se esses teoremas têm uma demonstração geométrica ou visual, pois isto já está discutido, de modo suficiente, na literatura. Além disso, a própria leitura de Netz nos deixa claro que os diagramas, como concebidos e utilizados pelos gregos, não são provas no sentido que hoje as conhecemos, tais como foram estabelecidas pelo formalismo[11]. Eles não eram usados, pelos gregos, como provas de afirmações, pois eles eram as afirmações.

Vimos, no movimento desta investigação, a questão inicial tomando forma e se organizando. Nosso interesse caminha na direção de saber se há um tipo de "pensamento visual" que tenha o significado de descoberta tanto quanto acreditamos que tem o significado de ilustração. Buscamos *investigar o significado epistemológico dos diagramas na produção do conhecimento matemático.* Para isto, sentimos a necessidade de compreender qual é a epistemologia condizente com o rigor exigido no contexto histórico em que nos situamos ao admitirmos que há um significado epistemológico para os diagramas.

Perguntamos pelos modos segundo os quais o conhecimento geométrico foi produzido e o significado que os diagramas tinham no cenário das produções matemáticas. Questionando o significado epistemológico dos diagramas, interrogamos o modo de nos abrirmos à compreensão dos objetos matemáticos. Como os diagramas podem auxiliar no conhecimento dos objetos matemáticos?

Ou seja, ao perguntar pelo significado epistemológico, interrogamos se há e, se houver, qual é a ligação entre essa vivência da figura, que, a princípio entendemos como intuitiva, e o conceito geométrico, que vemos como uma *objetividade matemática*[12].

Olhamos para o panorama atual e nos deparamos com uma forma de expressão da produção matemática que elimina a evidência da experiência sensível e perguntamos pela concepção existente na época, quando os diagramas eram constitutivos do conhecimento matemático, especialmente no contexto da geometria. Vimos, nas primeiras leituras, que a concepção não era muito distinta. O sensível, o mecânico e o manipulável também não eram considerados na

[11] As provas, a que nos referimos, são as que seguem a regras estabelecidas pelo formalismo, são as oriundas do método axiomático que estuda uma teoria escolhendo "um certo número de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente a, definições e demonstrações; ... deixando-se de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos" (Newton Costa, 1992, p. 49).

[12] Bicudo, M. A. V. em seu artigo "*Fenomenologia e Matemática*" esclarece que, segundo Husserl, "*a objetivação, ou o processo de tornar uma idéia objetiva, é uma questão de método fundado em dados pré-científicos da experiência. /.../ O conhecimento científico tem seu solo originador no mundo da experiência real, o mundo da sensibilidade../.../ É nesse solo variante de experiências diversas e mutáveis que a objetividade se enraíza*" (Bicudo, 2005, p. 20)

produção do conhecimento, mas havia uma exceção para as construções com régua e compasso. Como essa exceção era trabalhada? Quais frutos ela deu?

As discussões atuais sobre os diagramas, em sua maioria[13], aparecem ligadas às explicitações da gênese da demonstração e do "lugar" que ela ocupa na Matemática, ou os tomam como válidos apenas do ponto de vista de uma *representação ou ilustração.*

Nosso desejo, embora se relacione à demonstração, não a considera isoladamente, pois interrogando *o significado epistemológico dos diagramas na construção do conhecimento geométrico* buscamos compreender, "como" e "se" eles foram relevantes na construção desse conhecimento, perguntando pelo *o que o diagrama é e como ele é o que é*.

2.3. Os diagramas: ilustrações de uma compreensão inicial

2.3.1 Olhando para a matemática grega

No livro The Shaping of deduction in Greek mathematics: a study in cognitive history, Reviel Netz diz que não é um matemático e que seu livro não requer conhecimento de matemática e, raramente, exige algum conhecimento de grego. O autor procura expor o contexto em que se desenvolve o pensamento da matemática Grega num livro que, segundo ele, pode ser lido como uma descrição da prática da matemática Grega, como uma teoria da emergência do método dedutivo ou como um estudo de caso de história da ciência.

A obra é uma versão ampliada e revisada de seu trabalho de Ph. D desenvolvido na Universidade de Cambridge e busca fazer um estudo da *forma* e não do *conteúdo* da matemática Grega. O autor justifica essa opção dizendo, já no prefácio, que vê "o estudo da forma como um modo de compreender o

[13] Fazemos aqui uma exceção para as discussões que tratam da *Teoria das Categorias* visto que nela há a utilização de diagramas inclusive para expressar propriedades. A Teoria das Categorias fornece mecanismos para representar várias estruturas matemáticas. A construção dos seus diagramas pressupõe uma capacidade de generalização, abstração e unificação da teoria matemática que está sendo representada. Os diagramas da Teoria das Categorias são propriedades de estruturas abstratas como da teoria dos conjuntos, da teoria dos grupos, dos espaços topológicos, dos grafos, etc.

conteúdo. Mas este conteúdo – algumas descobertas e provas feitas pelos matemáticos gregos – são ambos belo e seminal[14]" (Netz, 1999, p. xi. Tradução livre). Ele ressalta que seu ponto de partida é a geometria e os diagramas com letras (letrados).

Netz afirma que, na matemática Grega, há asserções que são diretamente deduzidas de diagramas. Assumir isso implica assumir que há certas afirmações que o texto, ou a proposição matemática, esconde (ou omite); asserções que estão contidas nos diagramas. Aparentemente, essa afirmação traz consigo uma ameaça à validade lógica do trabalho matemático. Porém, Netz afirma que essa é uma ameaça ilusória, já que há um grande campo de asserções que são, ou eram, "mediados" por diagramas, havendo, mesmo, uma forte *inter-dependência* entre texto e diagrama.

Essa interdependência se revela de alguns modos. O mais importante é o que o autor caracteriza como "fixação de referência", para indicar que as letras (alfa, beta, gama, etc.) são usadas no texto para descrever objetos e o são de tal modo que o texto pode ser reconstruído a partir do diagrama. Ou seja, se temos um diagrama acompanhado por letras ou escrito com letras, elas, as letras, nos permitem compreender a ordem da sua construção e refaze-la. No entanto, o inverso não é verdadeiro, isto é, apenas pelo texto não se pode traçar o diagrama.

Um exemplo, trazido pelo autor, é o seguinte:

"Suponha você dizendo: aqui está desenhado um circulo, cujo centro é A".

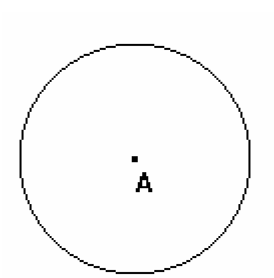


Figura 1.1.

[14] I see the study of form as a way into understanding the content. But this content those discoveries and proofs made by Greek mathematicians – are both beautiful and seminal.

O dito no texto não gera nenhuma dúvida: A está *especificado* se consideramos que um círculo só pode ter um centro.

Já se dissermos: "Seja desenhado um círculo, cujo raio é BC".

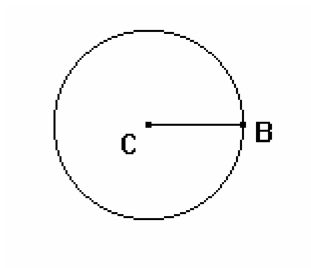


Figura 1.2 a

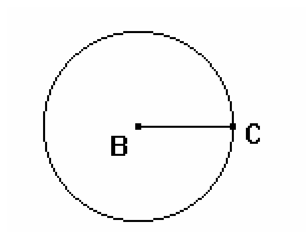


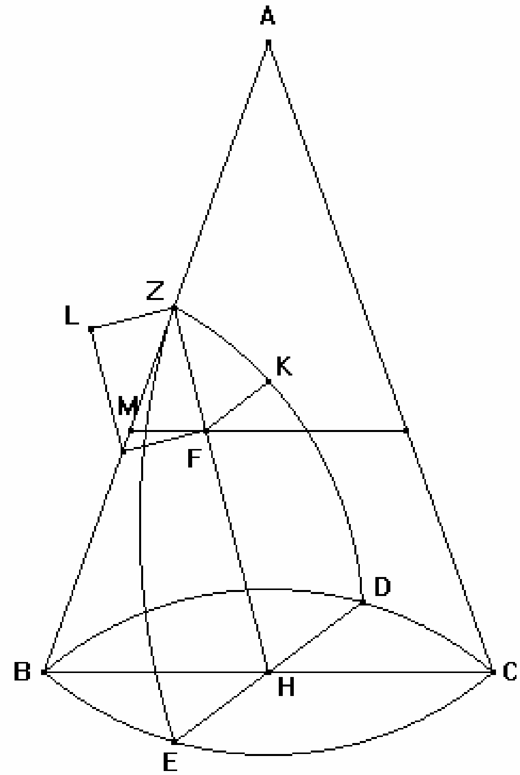
Figura 1.2 b

Temos um caso distinto do anterior.

Não é possível determinar se o círculo tem centro C ou B. Com isso, podemos dizer que o centro "não está especificado". Podemos questionar a diferença existente, nos contextos atuais, para tal situação, e a resposta seria completamente negativa. Se vamos tomar esse exemplo para a realização de uma prova, considerar o centro como B ou como C, não fará a menor diferença pois o que nos interessaria é o raio e, nesse caso, ele é o mesmo. Mas, se questionamos o que Netz chama de "especificação", podemos ter uma resposta diferente. O que o autor indica como especificação é uma *"especificação para a proposta da prova*", talvez numa linguagem mais atual, uma sugestão para a prova. Nesse caso, os elementos das figuras 1.2 a e 1.2b não nos são úteis, pois não sabemos qual ponto é o centro e qual deles pertence à circunferência.

Na seqüência de seu trabalho, o autor nos mostra como, muitas vezes, as letras consideradas nos textos são ambíguas podendo levar o leitor, que considera apenas o texto, a incorrer em erros ou mesmo não compreender o sentido matemático da proposição. Nesses casos, Netz diz que temos situações no texto de *"não especificação"*. Para exemplificar o modo como ele utiliza esse termo, Netz recorre a um exemplo das Cônicas de Apolônio e descreve o que segue:

Figura I.5 Conicas de Apolônio I.II



A letra F, no texto de Apolônio, é tomada para se referir a uma reta paralela ao segmento DE, que passa por K. F é, então, uma linha definida (ou especificada, que tem uma única possibilidade de existência na figura).

Porém, à medida que vamos trabalhando o texto percebemos que essa especificidade não é como parece. F tanto pode ser esse ponto específico da linha KF paralela a DE quanto pode ser o ponto de intersecção com a linha ZH.

Isso, caso o texto seja trabalhado independente do diagrama, pode gerar uma certa confusão e, dependendo do que é requerido na prova, uma falta de especificidade ou uma duplicidade na interpretação, pode acarretar uma incompreensão e o não desenvolvimento do que é requerido.

Netz declara que ele próprio sentiu-se surpreso ao perceber essa não especificação no texto; "eu nunca tinha pensado sobre esta insuficiência do texto: eu sempre li o diagrama no texto[15]". (Netz, 1999, p. 23. Tradução livre).

A partir desse ponto, sua argumentação passa a questionar os motivos de os matemáticos gregos da antiguidade fazerem uso dessas letras que podem

[15] I had never even thought about this insufficiency of the text: I always read the diagram into the text.

passar de um uso especificado para um não especificado. Sua conclusão é a de que, enquanto o texto está sendo trabalhado, o diagrama é assumido como existente. Ou seja, "o texto dá o diagrama por certo /.../ ao se discutir o diagrama, ele já havia sido desenhado[16]" (idem ibidem. Tradução livre).

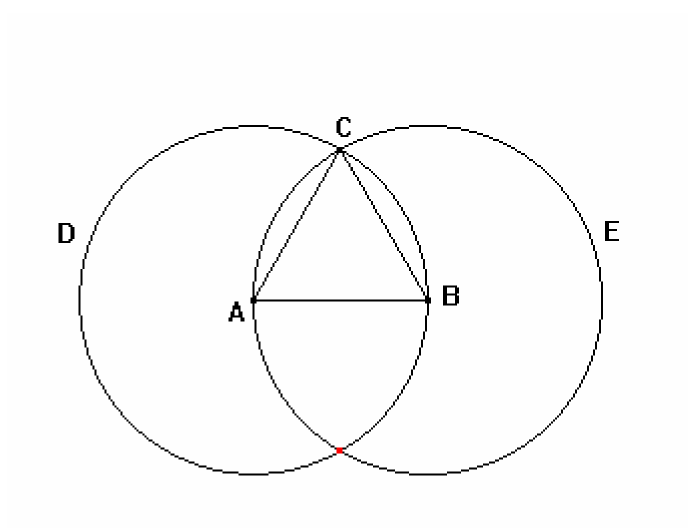
Por isso, para esse autor, texto e diagramas são, na matemática grega antiga, inseparáveis. Eles não podem ser considerados isoladamente. Há uma *inter-dependência* entre eles que remete ao sentido do que está sendo enunciado na proposição.

Consideremos mais dois exemplos trabalhados por Netz para destacar essa *inter-dependência* entre texto e diagramas.

Proposição I - Problema I (Livro I de Euclides)

Sobre uma linha reta determinada, descrever um triângulo eqüilátero.

Seja a linha reta AB de um certo comprimento. Sobre ela, deve-se descrever um triângulo eqüilátero.



Com centro em A e com intervalo AB, descreve-se (Postulado 3) o círculo BCD; e, com o centro em B e com o intervalo BA, descreva-se o círculo ACE. Do ponto C, *onde os círculos se cortam reciprocamente*, tirem-se (Postulado 1), para os pontos A, B, as retas CA, CB. O triângulo ABC será equilátero. Sendo o ponto A o centro do círculo BCD, será AC = AB (Definição 15). E, sendo o ponto B

[16] The text takes the diagram for granted. /…/ the time one comes to discuss the diagram, it has already been drawn.

o centro do círculo CAE, será BC = BA. Mas vimos que CA = AB. Logo, tanto CA, como CB, são iguais a AB.

Nesta primeira proposição, dos *Elementos, Netz* mostra-nos como Euclides procura justificar todos os fatos usados com identificação de seus respectivos postulados como, por exemplo, o postulado 3, o postulado 1 ou a definição 15. Já quando ele menciona "*o ponto C, onde os círculos se encontram*", não há uma justificação. Ele assume esse fato com base no diagrama. O encontro dos círculos é uma *evidência* dada na figura.

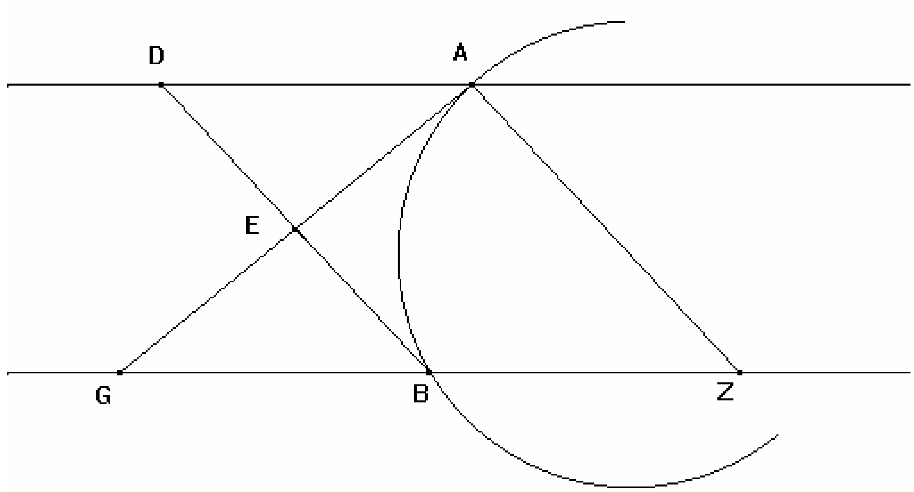
Outro exemplo trazido por Netz para mostrar a interdependência entre texto e diagrama é das Cônicas de Apolônio, onde ele usa o caso da parábola e o da hipérbole.

Cônicas de Apolônio III.I (o caso da Parábola)

Em Apolônio Netz encontra uma outra situação em que informações são sugeridas pelos diagramas. Ele argumenta que os fatos usados para a prova do que é requerido, tal qual no exemplo de Euclides, assumem evidências dadas na figura.

O argumento usado em Apolônio para a prova é a igualdade de ADBZ e AGZ. Netz comenta que para se chegar a essa conclusão poder-se-ia usar propriedades da adição (se a + b = b + c, então a =c) já que é preciso que o que é comum (AEBZ) seja subtraído. Porém, diz o autor, a discussão não é essa.

Cônicas de Apolônio III.I (caso da parábola)



Qualquer que seja o argumento usado para a prova há uma interdependência entre texto e diagrama. Ou seja, segundo ele, as afirmações feitas derivam da combinação entre texto e diagrama já que é preciso, por exemplo, identificar na figura o que é comum a ser subtraído. Isto é, "o solo essencial para esta afirmação – [de que AEBZ é comum] – é identificar os objetos no diagrama[17]" (idem, p. 27. Tradução livre)

Se analisarmos as duas situações trazidas por Netz, notamos que, no caso de Euclides, não há uma justificativa, com base num postulado ou numa proposição, para a possibilidade de os círculos se encontrarem. Ele toma isso como evidente na figura. No caso de Apolônio, a questão não é usar uma asserção com base na figura para demonstrar a igualdade entre as áreas, mas sim usar o diagrama para ver a possibilidade de as áreas serem subtraídas. Há uma evidência perceptível na figura que auxilia a compreensão do que é demonstrado.

Cônicas de Apolônio, I.45.

Neste exemplo, considera-se inicialmente que:

MK : KG : : GD : DL *[MK está para KG, assim como, GD está para DL]*

Netz interpreta que essa consideração é feita para que seja possível demonstrar a semelhança entre os triângulos MKG e GDL. Há, também aqui, um solo implícito pois, embora o diagrama, por si só, não possa demonstrar a semelhança requerida entre os triângulos, ele pode ajudar de um outro modo.

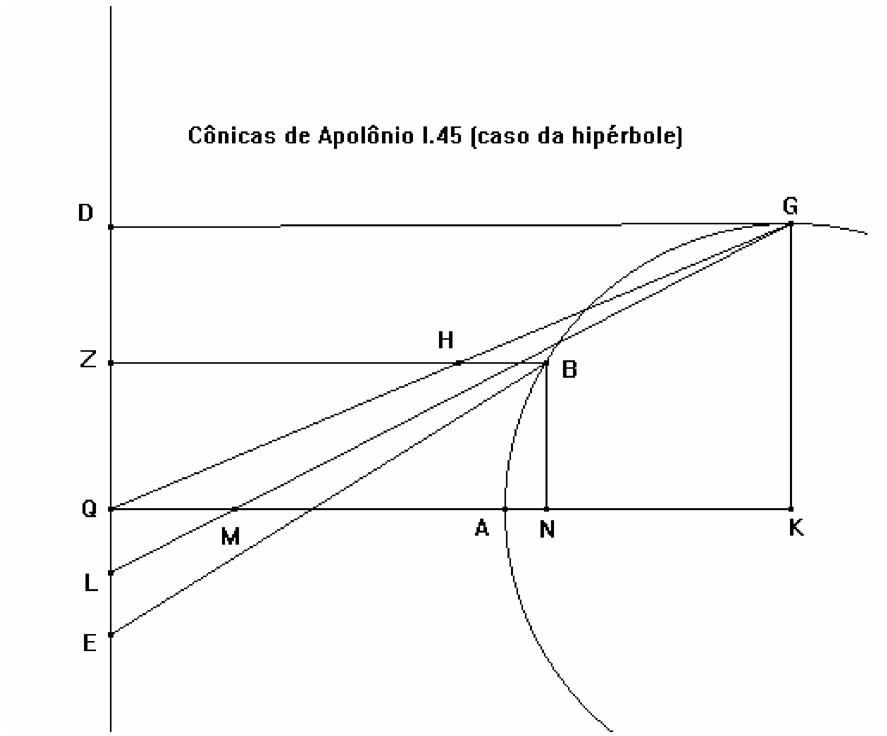
Quais triângulos são relevantes para essa semelhança não é um dado explícito no problema, mas pode ser percebido no diagrama. Juntando-se algumas informações, algumas delas dadas no texto e outras deduzidas do diagrama, a prova torna-se possível.

As informações são que:

GD é paralela a KQ, e esta é uma informação explicitada no texto.

[17] The essential ground for the assertion is identifying the objects in the diagram.

M está em KQ (não é uma informação explicita no texto mas pode ser deduzida do diagrama).



GK é paralela a DQ (especificado no texto).

L está em DQ (não é especificado no texto)

M está em GL (não é especificado no texto).

Com essas asserções, pode-se provar a semelhança requerida, segundo Netz, com certa facilidade. No entanto ele questiona: de onde vem essa facilidade?

Em parte, essa facilidade em coordenar os vários fatos envolvidos numa demonstração é atribuída à disponibilidade de todos eles no diagrama. Ou seja, o diagrama é sinótico. Não é o caso, afirma Netz, de o diagrama fazer afirmações do tipo "GK é paralela a DQ". Afirmações dessa natureza sequer podem ser consideradas verdadeiras com base no diagrama. Porém, se o texto assegura que as linhas são paralelas, os "códigos" acima podem ser somados a essas informações com base no diagrama.

Netz conclui suas análises dizendo que, na matemática grega, o diagrama não era prova de uma proposição. ***Ele era a proposição***.

Os diagramas individualizavam as proposições de tal modo que duas proposições distintas só poderiam ter o mesmo diagrama se elas fossem equivalentes ou se eles tivessem algumas alterações, como, por exemplo, as letras usadas.

Isso é possível quando observamos que as proposições da geometria grega eram dependentes de um sistema finito de relações. As proposições descrevem um universo finito. Ele é finito de dois modos: é limitado no espaço, por contornos de figuras, e é discreto. Cada proposição geométrica refere-se a um conjunto contínuo de pontos que podem ser traçados apenas com régua e compasso.

Cada conjunto de pontos que juntos formam as linhas é esquecido. A atenção volta-se para alguns poucos pontos que são individualizados ao serem nomeados. Isto é um fator essencial na matemática grega, diz Netz. “O diagrama é nomeado – mais precisamente, ele é letrado (marcado com letras)”. (Netz, 1999, p. 35. Tradução livre[18]).

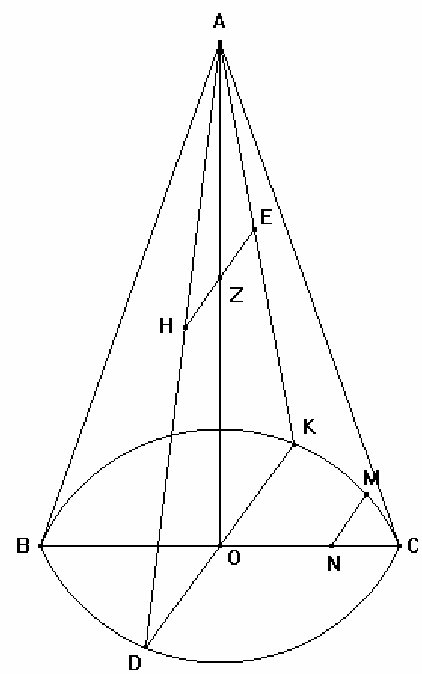
Esta ação de colocar letras nos diagramas, de nomeá-los, é o que torna o conjunto de pontos manejáveis e o diagrama possível

Voltemos a um exemplo das cônicas de Apolônio.

No texto, está descrito o seguinte:

> “De K, tome uma perpendicular a BC sendo desenhada (a saber) KOD. O conjunto de pontos (possíveis) D é uma linha. Como saberemos que o limite dessa linha é o círculo CKB? Porque D é o ponto final da ação de desenhar a linha KOD – e porque esta ação termina no círculo, já que *o círculo é o limite do universo desta proposição*. Não há, simplesmente, pontos fora deste círculo[19]”. (idem, p. 32. Tradução livre).

Conicas de Apolônio I.6



A “grafia” dos diagramas acontece pelo uso da régua e do compasso e das letras e,

> “redefine o infinito, a massa contínua das figuras geométricas como o que é feito pelo homem, finito, percepções discretas. É claro que isso não significa que o objeto da matemática Grega seja finito e discreto. A percepção do diagrama não esgota o objeto geométrico. Este objeto é parcialmente definido pelo texto, isto é,

[18] The diagram is named – more precisely, it is lettered.

[19] From K, let a perpendicular to BD be drawn (namely) KOD. The locus set up for D is a line. How do we know what it is at the limit of that line, on the circle CKB? Because D is the end point of the action of drawing the line KOD – and because this action must terminate on this circle *for this circle is the limit of the universe of this proposition*. There are simply no points outside this circle.

propriedades métricas são textualmente definidas. Mas as propriedades percebidas no diagrama são como um subconjunto de propriedades do objeto matemático. Isso porque os diagramas são bons para se pensar[20]". (idem, p.35.Tradução livre).

2.3.2. Um olhar para outras culturas

Keller (2005), em seu estudo sobre o modo como os diagramas eram usados na Índia do século VII d.C, traz um comentário de Bhaskara sobre o Åryabhatĩya e faz uma distinção entre *figura* e diagrama. Enquanto *figura* é a idéia abstrata de um objeto matemático, *diagramas* são desenhos que representam tais idéias.

No decorrer de seu texto, o autor vai mostrando como, na Índia Antiga, figura e diagrama tornam-se inseparáveis e até mesmo indistinguíveis. Eles são de tal forma inseparáveis que um complementa e confirma o que o outro diz. "Parece que os diagramas eram usados para reafirmar definições e definições permitem a construção correta de diagramas[21]". (Keller, 2005, p. 294. Tradução Livre).

Nessa cultura – a da Índia Antiga – os diagramas eram importantes à compreensão do raciocínio matemático que está sendo explicitado nos textos.

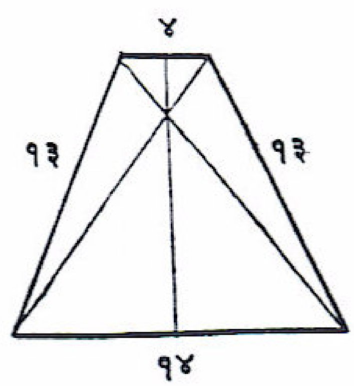
Keller, baseando-se na versão impressa do comentário de Bhaskara, de autoria de K. S. Shukla (1976) e no manuscrito da Kerala University Oriental Manuscripts Library (KUOML), confronta as imagens visuais e nos traz indicações de como os diagramas eram partes centrais do comentário de Bhaskara.

Bhaskara, em seu comentário do Åryabhatĩya, segue uma estrutura de texto que contém: uma sentença introdutória, um comentário geral, exemplos resolvidos, representação e procedimentos. A parte que diz respeito à

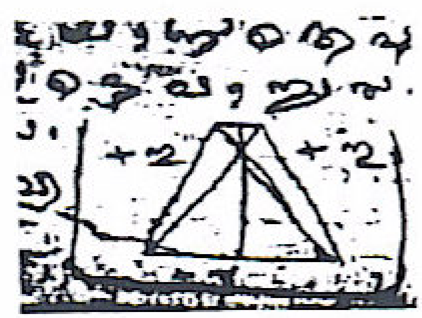
[20] Redefines the infinite, continuous mass of geometrical figures into a man-made, finite, discrete perception. Of course, this does not mean that the object of Greek mathematics is finite and discrete. The perceived diagram does not exhaust the geometrical object. This object is partly defined by the text, e.g. metric properties are textually definite. But the properties of the perceived diagram form a true subset of the real proprieties of the mathematical object. This is why diagrams are good to think with.

representação é a que abre possibilidades para que possamos compreender a prática dos diagramas na Matemática da Índia que, segundo Keller, têm relação intrínseca com o texto. Essa *representação* é acompanhada por um raciocínio – que Bhaskara denomina *procedimento* – em que a resolução do exemplo é exposta. Os diagramas expressam situações diversas e podem ser figuras geométricas simples, complexas, representação de objetos tridimensionais ou de situações concretas (problemas de aplicação). Mostramos, na seqüência, as figuras F1, F2, F3 e F4 como respectivos exemplos desses usos. Buscamos colocar as figuras que aparecem na edição impressa ao lado das que aparecem no manuscrito, como faz Keller em seu texto.

Figura F1. (Exemplo de figuras geométricas simples)

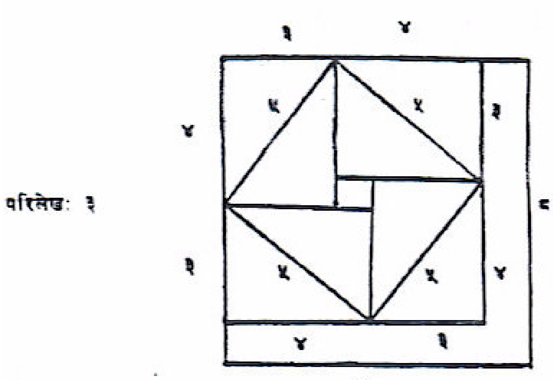


Shukla. 1976. p. 64

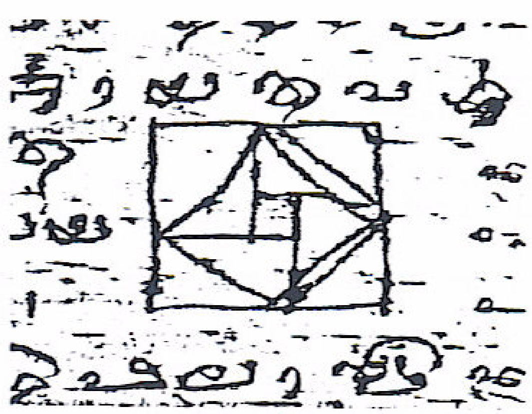


KUOML Co 1712. Folio 42 recto–verso

Figura F2 (Exemplo de figuras geométricas complexas)



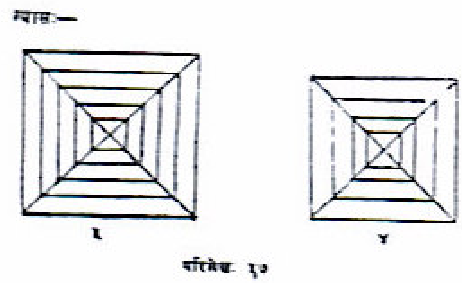
Shukla. 1976. p. 48



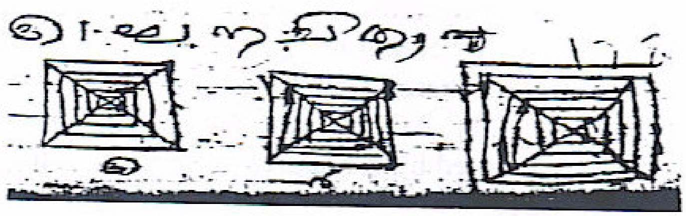
KUOML Co 1712. Folio 33 recto

[21] We have seen that diagrams could be used to rectify definitions, and conversely definitions would have enabled the construction of correct diagrams.

Figura F3 (Exemplo de representação de objetos tridimensionais).

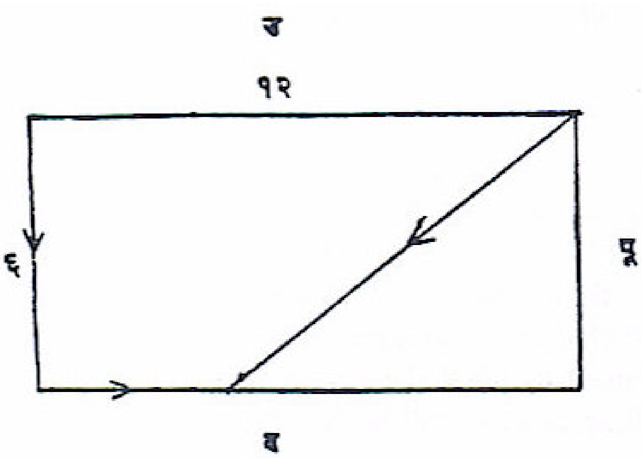


Shukla. 1976. p. 111–112

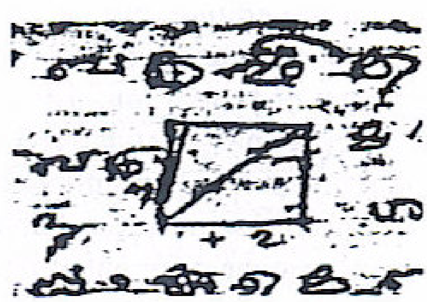


KUOML Co 1712. Folio 65 verso

F4 (Exemplo de representação de situações concretas[22])



Shukla. 1976. p. 102



KUOML Co 1712. Folio 60 recto

[22] Este problema é apresentado pelo autor como o problema do "*Hawk and rat*", no entanto, nós o conhecemos como o problema do "gavião e da cobra". O gavião está no topo de um poste e vê uma cobra que deve correr para a sua toca localizada no pé desse poste.

Keller nos chama a atenção para os desenhos mostrados no manuscrito. Podemos observar que eles são desenhados em pequenas "caixas" e não têm precisão ou proporção. Não são raras, porém, as ocasiões, no comentário, em que Bhaskara descreve técnicas e ferramentas necessárias para a construção dos diagramas. Esse fato abre possibilidades de interpretação sobre a construção dos diagramas e Keller sugere que é possível que os diagramas tenham sido desenhados pelo matemático, nas suas *superfícies de trabalho*,[23] com precisão e, depois, copiados – até mesmo por escribas – para os manuscritos. Essa interpretação é possível porque, segundo Keller, o próprio Bhaskara sugere que há casos em que a precisão é requerida. E quais seriam esses casos?

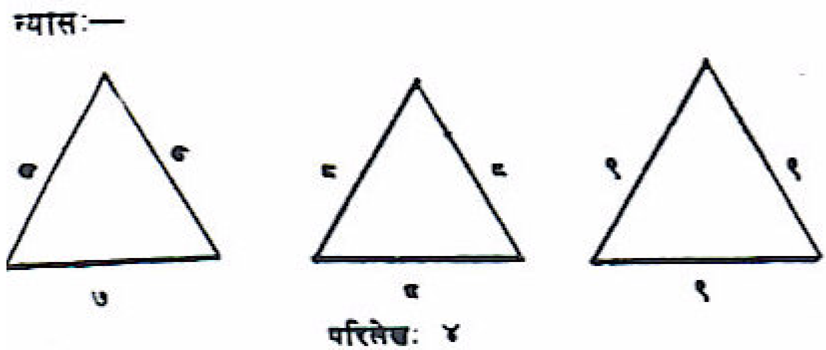
Os diagramas assumem, ao longo do comentário de Bhaskara, diferentes funções. Na maioria dos casos, eles são parte dos exemplos resolvidos, mas eles podem estar sendo usados para: especificar uma definição, fazer um resumo do processo, indicar um processo segundo o qual um procedimento é desenvolvido ou mesmo para uma prova.

Keller afirma que o vocabulário pode sugerir uma série de representações e, nesse caso, os diagramas são usados por Bhaskara para limitar ou induzir a uma imagem mental apropriada à situação.

Como resumo de um processo, Bhaskara usa o diagrama para mostrar o que é conhecido e o que é requerido no problema. O diagrama indica os passos para o raciocínio. O diagrama não mostra o processo, mas pode ser usado como recurso heurístico, guiando o procedimento.

Como ilustração do que está sendo dito, vamos considerar um dos exemplos que Keller discute. Nas figuras abaixo, é requerida a área do triângulo[24]. São conhecidos seus lados. Vemos que, nos desenhos que aparecem no manuscrito, as alturas são traçadas nos triângulos, porém nenhum valor está associado a elas. Isso mostra o modo como o diagrama sugere o que deveria ser calculado: *a altura do triângulo*.

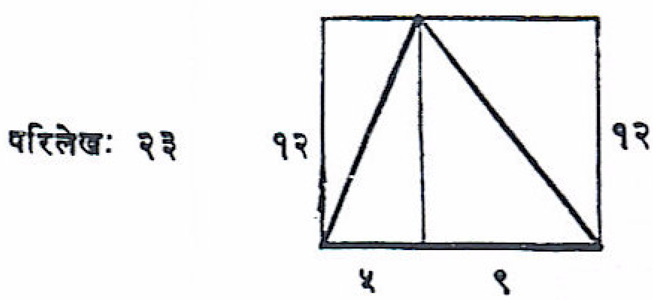
[23] Keller nos descreve as "*superfícies de trabalho*" tal como Netz o faz para os gregos. Elas eram como "tabuas empoeiradas", ou seja, cobertas por uma poeira muito fina, sobre a qual se podia escrever.



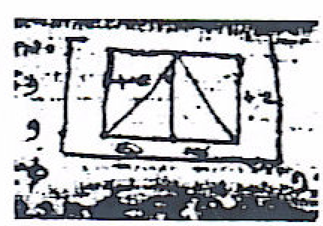
Shukla. 1976. p. 55

KUOML Co 1712. Folio 36 recto

No verso 9 do comentário, Bhaskara considera a área de um triângulo cujos lados são dados: 13, 15 e 14 e traz uma prova que considera o diagrama abaixo.



Shukla, 1976, p. 69



KUOML Co 1712. Folio 42 verso

É dito que a área do triângulo requerida é "a soma das metades das áreas dos campos retangulares. Esta área (do trilátero) é a soma das metades das

[24] Keller não usa a palavra "*triângulo*" mas sim "*trilátero*" pois, segundo ele, referíamo-nos às figuras segundo seus lados e não a seus ângulos.

áreas dos dois (retângulos), um de largura 5 e comprimento 12, o outro de largura 9 e altura 12[25]". (idem, p. 297. Tradução livre).

O diagrama resume o problema: são dados os lados e a figura mostra o triângulo inscrito num retângulo. A altura do triângulo divide-o em dois triângulos retângulos cuja área equivale a metade dos retângulos nos quais o primeiro foi dividido. Keller diz que o diagrama que ilustra o processo pode também ser usado para expressar o processo, ou seja, ele pode ser um recurso de comunicação do pensar do matemático para a resolução do problema.

Mas e quanto a prova?

Keller diz que o comentário de Bhaskara exige um tipo de raciocínio específico: *a verificação*. Ele discute procedimentos que justificam regras usadas por Århyabhatĩya, porém não faz provas formais, no sentido que as conhecemos hoje, ou como as que são tratadas nos Elementos de Euclides. A palavra *prova* é usada para se referir ao diagrama em que se está trabalhando. Por exemplo: ao falar da semelhança de triângulos, Bhaskara diz que, para encontrar a medida de um determinado lado do triângulo, é possível recorrer à regra de três. Ele escreve: "para mostrar a prova da regra de três, um campo é representado[26]" (idem, p. 299. Tradução livre). Segue-se, então, um diagrama.

Keller conclui que, o que para nós é fundamental na exploração geométrica, a prova, para Bhaskara é apenas um recurso de linguagem já que a verificação está sendo dada pelo diagrama. Destaca, porém: reconhecendo que, se o trabalho se dava sobre uma superfície empoeirada e as explorações eram orais, nada se pode afirmar sobre as provas sem que se fantasie o processo. O que temos de informações escritas nos levam a crer que, na Matemática da Índia Antiga, dificilmente se pode separar definições de diagramas sem que a significação do trabalho seja perdida.

Indicações do significado dos diagramas ou das figuras na organização matemática de outras civilizações podem ser encontradas, por exemplo, no trabalho de doutorado de Gaspar (2003). A autora faz um estudo que mostra como

---

[25] Or else, its area is the sum of half the areas of two rectangular fields. This area (of the trilateral) is the sum of half the areas of these two (rectangles), the one whose width is five and length twelve, and the second one also, whose width is nine and length twelve.
[26] In order to show the proof of (that) Rule of Three, a field is set down.

as figuras foram significativas ao cálculo de áreas e volumes em diferentes culturas. Ela descreve processos específicos para construções de figuras geométricas que são usados, por exemplo, na solução de problemas de construção de altares. Gaspar destaca que, nas civilizações antigas, como por exemplo na Babilônia, nenhum teorema ou prova explicita é encontrado. A geometria Egípcia dá ênfase às aplicações práticas e investigações de propriedades geométricas.

Uma nova questão, entretanto, nos intriga: consideramos os estudos de Netz de 1999, o trabalho de Gaspar, de 2003, e ouvimos Keller em seu artigo publicado em 2005. O que mais há, em termos de discussão, sobre *os diagramas*? Essa questão nos levou ao workshop da Universidade de Pisa, que apresentamos a seguir.

2.3.3. Os diagramas nos contextos atuais: Workshop na Universidade de Pisa

Em novembro de 2004, na Universidade de Pisa, ocorreu um workshop intitulado "*The Problem of Diagrams and Drawings Criticism in Mathematical Texts"*, cujo objetivo foi discutir a necessidade de se estabelecerem regras para a impressão de "diagramas críticos" nos livros textos de matemática. Essa necessidade surge devido à ausência dos diagramas ou à sua alteração que leva a uma *mudança* de foco na produção matemática. Essa mudança envolve tanto a forma de compreender o pensamento matemático, já que a alteração das figuras pode levar o leitor a uma interpretação distinta daquela na qual a proposição foi concebida, quanto a uma alteração do caminho da demonstração da proposição. Os trabalhos apresentados no workshop continham estudos de casos envolvendo diagramas e deveriam enfatizar sua "relevância para a compreensão do texto matemático e a relevância da escolha do diagrama para um ponto de vista crítico[27]." (Minutes, 2005, p. 06. Tradução livre). A exposição oral concentrar-se-ia nas principais características filosóficas ou matemáticas do diagrama que estaria sendo apresentado e na solução que o autor do trabalho propunha.

Franco Ghione, por exemplo, apresenta um texto que discute as figuras no Teorema de Menelau. Nesse texto ele afirma que, em alguns casos, as figuras ajudam a compreender o sentido das proposições formais e são de grande ajuda na compreensão sintética.

No entanto, Ghione chama a atenção para o fato de que, atualmente, há um número muito reduzido de figuras nos textos matemáticos, o que é um indício de que, como elas são consideradas falsas ou enganosas pelos matemáticos, elas não aparecem na redação final de seus trabalhos e, portanto, os editores não as consideram dignas de atenção. Essa "pouca atenção ao aspecto visual (design), a simples beleza artística e ao sentido das figuras" (Ghione, 2005, p. 53. Tradução livre[28]), faz desaparecer a evidência fundamental do pensamento original do autor e, embora não seja objetivo do texto desmerecer o rigor da estrutura matemática, acredita-se que o uso inteligente das figuras não apenas auxilia a compreensão do desenvolvimento matemático como propicia que nossa imaginação crie situações e exemplos que o texto formal sozinho não o faria.

Nesse momento o autor nos chama a atenção para a variedade de *modos* em que um teorema pode ser considerado. Ou seja, para Ghione, o *modo* que expõe a importância de um teorema varia segundo o momento histórico em que ele está sendo considerado. Ele nos diz que "teoremas não são constantemente considerados importantes do mesmo modo" (idem, p. 52. Tradução livre[29]) já que não se mantém fiel ao "espírito do momento histórico" no qual estão sendo considerados.

Diz o autor,

[27] Emphasizing the relevance of the diagram, in understanding the mathematical text, and the relevance of the chosen diagram from a critical point of view.
[28] This, in the final analysis, leads to the modern idea of publishing mathematical subjects with little regard for the design, the simple artistic beauty and the sense of figures.
[29] Theorems are not constantly important in the same way.

> "O teorema da classificação de poliedros regulares, por exemplo, era extremamente importante, seja na matemática ou na filosofia, desde Platão até a divina proporção de Pacioli. Hoje ele é minimamente considerado, e, quando é ensinado, sua prova é evitada. /.../ Acreditamos ser muito útil – para compreensão do desenvolvimento matemático e do pensamento matemático em geral - considerar teoremas em referência à sua história e na teia de seus significados possíveis[30]" (idem, 2005, p. 52-3. Tradução livre).

Ghione defende, em seu texto, que a abordagem histórico-filosófica torna possível ver o processo de construção das provas em que se envolveram muitos matemáticos e cada um deles traz uma contribuição que, sendo ou não decisiva para a prova, mostra a riqueza tanto do próprio teorema quanto do meio disponível no qual as construções matemáticas se consolidaram. A história e filosofia tornam viva a riqueza do solo em que uma proposição ou um teorema foi descoberto, compreendido e expresso.

Ghione afirma que "*o pouco interesse que matemáticos e historiadores têm pelas figuras, no final, enfraquecem o conteúdo científico do texto*" (idem p. 57. Tradução livre[31]) pois, há casos em que as figuras têm importância particular, e, muitas vezes, acrescentam um novo significado ao texto.

Para considerar um outro exemplo ilustrativo da importância das figuras no texto matemático, vamos considerar o texto de P. Crozet, *Editer dês figures dês manuscrits árabes dês géométrie: l'exemple d'al Sijzi.*

Nesse artigo, o autor discute a dificuldade que encontram os editores dos tratados de matemática árabe no que diz respeito às figuras geométricas, dadas a distância no tempo, das tradições científicas em que elas surgiram e a forma como os manuscritos foram copiados. Ele argumenta que, embora os diagramas fossem auxiliares indispensáveis ao pensamento de matemáticos como, por exemplo, o caso de Arquimedes que ele explicita, as edições atuais podem passar uma outra idéia. Salienta que uma resposta definitiva à questão das normas para a edição

[30]The theorem of classification of regular polyhedral, for example, was extremely important, be it on mathematical or philosophical Ground, starting from Plato up to Pacioli's divine proportion. Today this theorem is very slightly considered, and when it is taught, its proof is avoided. We believe it very useful for understanding mathematics statements and general mathematical thought – to insert theorems in the richest possible environment, considering them with reference to their history and the web of their possible meanings.

[31]This case shows how the little interest mathematicians and historians have for figures in the end weakens the scientific content of the text. (grifos da pesquisadora).

de textos antigos, embora necessária, parece estar ainda em nível de discussão inicial. A solução, segundo acredita esse autor, está em buscar a resposta à questão na própria matemática, já que a relação entre o geral e o particular está em perfeita correspondência com o próprio texto. Para exemplificar, ele traz a *proposição cinqüenta do Livro dos Lemas*, atribuído a Arquimedes e comentada por *al-Sijzi,* que lhe dá um certo número de demonstrações alternativas.

Crozet enuncia,

> Consideremos, sobre o diâmetro AB de um semicírculo, um ponto qualquer C; por ele construímos os semicírculos de diâmetros AC e CB, e levantamos por C uma perpendicular CD à AB; construímos, finalmente, de uma parte a outra da perpendicular os dois círculos tangentes a perpendicular e aos dois semicírculos. A proposição cinqüenta do Livro dos Lemas assegura que esses dois círculos são iguais. A figura apresentada pelas sucessivas edições de trabalhos é similar a figura seguinte, onde os dois círculos iguais são os círculos HGEF e LMN[32]" (Crozet, 2005, p. 34. Tradução livre).

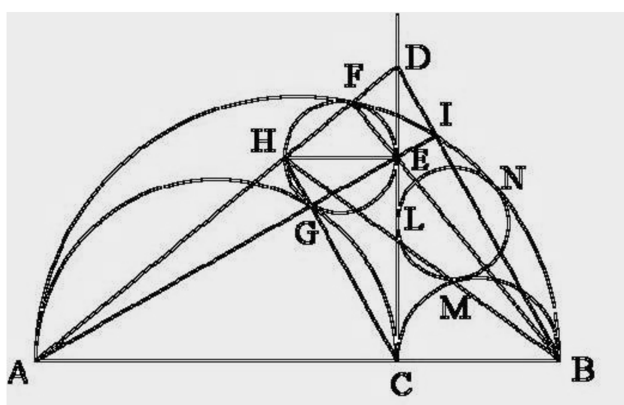


figura 1

[32] On considere, sur lê diamètre Ab d'um demi-cercle, um point quelconque C; on mène les demi cercles de diamètres AC et CB, et on élève en C la perpendiculaire CD à AB ; on construit enfin, de part et d'autre de cette perpendiculaire, les deux cercles tangents à la perpendiculaire et aux deux demi cercles. La cinquième proposicion du Livre des lemmes assure que ces deux cercles sont éguaux. La figure présentée par les éditions successives de l'ouvrage est similaire à la figura suivante, où les deux cercles éguax sont les cercles HGEF et LMN.

No entanto, diz Crozet, al-Sijzi nos mostra uma outra figura onde o ponto que divide o diâmetro do grande semicírculo, denominado ponto K, é ponto médio desse diâmetro (considerado por al-Sijzi como GU).

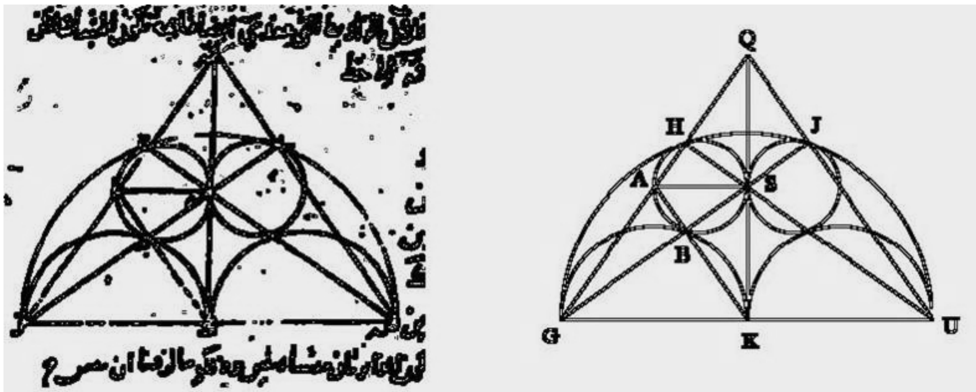


figura 2

> mesmo que os matemáticos tenham declarado algumas linhas a mais no texto, este caso particular introduz uma propriedade suplementar que não existe no caso geral, a saber, que os círculos tangentes a perpendicular KQ são igualmente tangentes entre si[33]". (idem p. 35. Tradução livre).

A figura apresentada por al-Sijzi, cujos manuscritos podem ser encontrados na Biblioteca Nacional de Paris, é completamente distinta da primeira. al-Sijzi fala de um dos dois círculos como sendo de diâmetro AS, onde S é o ponto de tangência desse círculo com KQ, e introduz o outro como sendo o círculo SJ, onde J é a interseção do prolongamento de GS com o semicírculo de diâmetro GU.

Em sua demonstração, semelhante à que é atribuída a Arquimedes, al-Sijzi não utiliza construções que coloquem em jogo o círculo de diâmetro AS e a igualdade GK.KU = GU.AS; a conclusão se limita, então, a utilizar uma observação com um desenvolvimento similar para o segundo circulo dando a mesma igualdade, onde AS será, todavia, substituído pelo diâmetro do segundo circulo, o que permite deduzir a igualdade dos dois diâmetros.

[33] Même que lê mathématicien l'avit explicitement déclaré quelconque quelques lignes plus haut, ce cas particulier introduit une propriété supplémentaire qui n'existe pas dans le cas général, à savoir que les deux cercles tangents à la perpendiculaire KQ sont égalment tangents entre eux.

Com esse exemplo, o autor conclui que não se pode afirmar que normas de uso antigo são sempre idênticas ou então que as normas antigas são hoje aplicadas com o mesmo rigor. Segundo ele apenas se observa que é necessário restituir às figuras suas imagens originais, isto é, expor os diagramas tal qual eles são encontrados nos manuscritos, já que alterações podem nos impedir de conhecer, inclusive, o objeto matemático como ele foi concebido.

Os textos discutidos no workshop nos mostram que a falta de atenção com as figuras, nas edições de matemática, pode fazer desaparecer a evidência do pensamento original do matemático. Isso nos leva de volta ao nosso questionar e, novamente, perguntamos: são os diagramas auxiliares para o pensamento matemático?

As leituras realizadas até o momento nos levam a crer que as figuras são uma parte “sombria” dos textos matemáticos e que ainda não estão totalmente exploradas. Porém, se queremos compreendê-las como inseridas num contexto de produção matemática, devemos olhá-las como *diagrammas*, tal qual elas eram concebidas na matemática grega, e não como simples ilustrações que realçam o design das publicações de textos matemáticos. A mostra do workshop nos faz questionar essa desatenção com as figuras e nos leva de volta ao pensamento que nos põe diante da produção do conhecimento no momento em que o matemático realiza seu trabalho e busca um modo de expressar ou comunicar as suas idéias.

Seriam os diagramas expressões simples desse pensar? Seriam os diagramas válidos como pontos de apoio e ancoragem da produção matemática? Haveria, ainda hoje, num contexto que prima pelo rigor da linguagem e o fazer analítico, disponibilidade para um pensar que se volte aos diagramas? Como seria a atual produção matemática e o pensar do matemático que se envolve com a produção e o ensino dessa ciência dentro do conceito de rigor hoje imperante?

Isso nos faz vislumbrar a possibilidade de questionar a vivência do matemático em seus modos de tratar os objetos matemáticos. Seria possível perguntar por essa vivência? Haveria uma ligação entre a vivência da figura, entendida como intuitiva, e os conceitos matemáticos ou a objetividade matemática? Como a manipulação ou construção de figuras pode satisfazer determinadas relações matemáticas?

Essas questões nos apontam um novo rumo: *vê-se a possibilidade de perguntar pelo significado dos diagramas para quem, hoje, se envolve com a produção e o ensino de matemática.*

"/.../ filosofia [é] este amor a ... que se dá como a saudade da pátria ... precisa se manter na negatividade, na finitude. Filosofia é o contrário de todo aquietamento e asseguramento. Ela é o turbilhão para o interior do qual o homem é arrastado, afim de que assim sozinho e sem a presença de qualquer fantasia compreenda o ser aí" (Martin Heidegger, 2003).

Capítulo III – Procedimentos de Investigação

> *"O início autêntico é sempre, enquanto salto, um salto que antecipa [avanço – Vorsprung], no qual tudo o que está para vir está já ultrapassado [übersprungen], se bem que como algo de velado. O início já contém, encoberto, o fim. O início autêntico não tem nunca, certamente, o caráter de principiante [Anfängerhafte] que tem o que é primitivo" (Martin Heidegger, 1998).*

3.1. Novos rumos: o olhar que vê as entrevistas ...

À medida que caminhamos, o percurso da investigação vai se desenhando e tornando possível o falar sobre o que, a princípio, era uma inquietação. A pergunta que orienta a busca se mantém fiel ao desejo de querer saber, mas vai se revelando em diferentes modos de *ver.* As possibilidades de compreensão vão se abrindo e os caminhos se diversificam, trazendo beleza e riqueza ao destino do que se pesquisa. Perguntar pelo significado dos diagramas na produção do conhecimento matemático nos faz olhar para diferentes contextos e nos traz aos dias atuais. Consideramos, atentamente, a exposição de estudiosos de filosofia e história da matemática, que se apresentaram no Workshop de Pisa discutindo a importância das imagens nos textos de matemática. Agora indagamos: e os matemáticos, as pessoas que, nos dias atuais, estão envolvidas com a produção e o ensino dessa Ciência, o que pensam sobre as figuras e os diagramas?

Abre-se a possibilidade de realizarmos entrevistas e, com elas, buscar um modo de compreender, com base em *relatos* individuais de *experiências vividas* por sujeitos em situações de produção, ensino e estudo de matemática, *se* e *como* os diagramas são considerados significativos na produção atual.

Tomando, como sentido primordial, a experiência vivida pelos sujeitos e orientados pelo foco da pesquisa, elegemos os sujeitos. Optamos por entrevistar professores de curso superior que lidam com a Ciência Matemática tanto do ponto de vista do ensino quanto da pesquisa. Escolhemos três universidades estaduais: USP (Universidade de São Paulo), UNESP (Universidade Estadual Paulista) e UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) e entrevistamos 05 (cinco) professores. O fato de nos atermos às universidades estaduais se deve ao seu significado histórico neste Estado, tanto no desenvolvimento de pesquisa em Matemática, quanto ao de formar professores e pesquisadores de Matemática.

Nessas Universidades a escolha dos depoentes não foi aleatória, mas buscou pautar-se na relevância do trabalho que vêm efetuando no ensino superior de Matemática e na própria produção dessa Ciência.

Da UNESP, nossa familiaridade com o trabalho do corpo docente de Matemática permitiu que nos dirigíssemos a um docente específico que concordou em dar o depoimento, bem como autorizou que gravássemos a entrevista.

Da USP, o sujeito 1 também foi escolhido por nossa familiaridade com o seu trabalho tanto na docência no curso de Licenciatura em Matemática, quanto nos cursos de especialização e formação continuada de professores. O sujeito 4, também da USP, foi uma indicação do entrevistado 1 que mencionou sua preocupação com a formação do professor de Matemática e com a produção Matemática.

Da UNICAMP, Universidade com a qual não estamos familiarizados, recorremos às pessoas que tinham, na página da Universidade disponibilizada na Internet, uma familiaridade com o trabalho na formação de professores e na pesquisa em Matemática. Entramos em contacto com alguns docentes e os depoentes 2 e 3 foram os que aceitaram dar a entrevista e nos permitiram a gravação.

A pergunta feita aos entrevistados foi elaborada considerando a interrogação que orienta o trabalho e tem a intenção de trazer elementos que favoreçam a compreensão do que é investigado. Perguntamos aos sujeitos entrevistados[34]: *em sua opinião, qual o significado dos diagramas (figuras) na produção do conhecimento matemático? E nas atividades de ensino de matemática?*

[34] Por motivos éticos não divulgaremos os nomes dos professores entrevistados.

3.2. Construindo o caminho para a interpretação do que é perguntado

> O termo *tematizar* é formado pela raiz *tema*, ou seja, assunto, idéia, algo sobre o que dissertar, e pelo sufixo *izar* que indica uma prática; indica o ato de submeter a uma ação ou tratamento o processo denotado pela raiz. Assim, *tematizar* quer dizer pôr de forma estabelecida, localizada um assunto ou tópico sobre o qual se vai discursar, dissertar ou falar seriamente" (Martins & Bicudo, 1989, p. 76).

O modo como a pergunta é formulada revela a intenção do pesquisador. O cuidado que temos ao elaborá-la é para que ela dê liberdade de o sujeito entrevistado expor o sentido que os diagramas têm para ele, ou seja, a intenção é que o sujeito possa se sentir livre para *relatar* como ele percebe os diagramas nas atividades de ensino, pesquisa ou estudo de matemática, exemplificando sua vivência com os diagramas e relatar fatos que considera importante.

Gravamos as entrevistas concedidas pelos sujeitos, com sua anuência, e transcrevemos as fitas. A partir das transcrições, iniciamos uma organização dos dados para que fosse possível fazer a análise e interpretação das suas falas. Começamos por *descrever* os dados obtidos nas entrevistas.

A *descrição* é um momento que exige do pesquisador um rigor metodológico pois, segundo Bicudo (2000), a *descrição*, como trabalhada na investigação fenomenológica, é um relato do percebido pelo sujeito e, como tal, não admite, por parte do pesquisador, julgamentos ou avaliações.

Ou seja, fazemos a leitura das transcrições, tantas vezes quantas forem necessárias para que a linguagem do sujeito faça sentido ao pesquisador, que é orientado por sua interrogação. Sua interrogação é, segundo Martins[35], o ponto principal na pesquisa, já que é ela que indica a trajetória, orienta os procedimentos, define os sujeitos e aponta a direção das análises de dados na sua interpretação.

As leituras que são feitas na fase inicial, atentas ao sentido do todo, também nos orientam num próximo passo: delimitar, nas descrições, as *"unidades de significado*". Essa delimitação se faz necessária porque, "não se pode analisar todo o texto simultaneamente, então temos que quebrá-lo em unidades manejáveis" (Giorgi, 1985, p. 11. Tradução livre[36]), que serão analisadas individualmente.

Destacadas as unidades de significados, o pesquisador busca por *invariantes* ou pelo que é característico em cada descrição. Estamos, nesse movimento, envolvidos com a *redução fenomenológica* que nos encaminha para invariantes cada vez mais abrangentes, para o que denominamos, também, as *categorias abertas*.

As *categorias abertas* são interpretadas pelo pesquisador num movimento de *reflexão* que procura transcender as descrições. Essa reflexão de que se vale a fenomenologia

> "é um movimento de busca do originário ... [que] não se fecha no pensamento objetivo [mas] se movimenta nos limites do que é tematizado, do possível e do evidente, investigando os atos efetuados nesse pensamento, recolocando-os no seu contexto. Portanto a reflexão transcende os limites do pensamento objetivo, conectando-o ao existencial, pois é a experiência vivida nesse nível que investe energia naquele pensamento" (Bicudo, 2000, p. 58).

Na reflexão, nos dirigimos para as situações vividas na pesquisa, fazendo a *redução transcendental*, num movimento que Husserl considera necessário para que o pesquisador possa "compreender de dentro e a partir das fontes o espetáculo do mundo" (Merleau-Ponty, 1992, p. 53), ou seja, é, pela redução que o pesquisador pode evidenciar as situações que busca elucidar.

---

[35] Martins, Joel & Bicudo, Maria A. Viggiani. *A pesquisa qualitativa em Psicologia: fundamentos e recursos básicos*. São Paulo: EDUC, Moraes Editora, 1989.

[36] Since one can not analyze a whole text simultaneously, one has to break it down into manageable units.

As compreensões e interpretações do pesquisador que são expostas nas análises das categorias abertas revelam-se como *sínteses de transição*, ou seja, são *expressões do percebido* no movimento de reflexão orientada pelas descrições dos sujeitos e pela interrogação. Sendo compreensões do percebido elas são perspectivais[37] e, como tal, "*mutável e somente provável; isto é, se quisermos, não passa de uma opinião; mas que ... verifica ... a pertença de cada experiência ao mesmo mundo,seu poder igual de manifestá-lo a título de **possibilidades do mesmo mundo**.*" (idem. p. 49), São abertas à interpretação e variação mas revela, em cada perspectiva, o *todo percebido* pelo pesquisador no movimento reflexivo, na tematização do que busca compreender.

> "Cada percepção envolve a possibilidade de sua substituição por outra e, portanto, uma espécie de desautorização das coisas mas isso também quer dizer: cada percepção é o termo de uma aproximação ... possibilidade que pode ser irradiação desse mundo único que **ha**" (idem ibidem).

Desse modo, a *análise dos dados* obtidos na pesquisa de orientação fenomenológica, dão, ao pesquisador, elementos para *dizer* sobre o modo como ele compreende aspectos do fenômeno que investiga e, sendo assim, não expressam conclusões finais ou regras imutáveis. As análises do pesquisador fenomenólogo são *abertas* a novas tematizações e podem originar outras compreensões, interpretações e comunicações.

---

[37] O termo *perspectiva*l está aqui sendo tomado para significar que a compreensão expressa pelo pesquisador revela uma (ou algumas) das várias perspectivas em que o fenômeno pode ser percebido.

3.3 Organizando os dados das entrevistas: procurando explicitar o movimento realizado para a redução fenomenológica

Svensson (1986) afirma que a *essência* ou *estrutura do fenômeno* que o pesquisador fenomenólogo investiga não é o fim (objetivo) das análises, mas que são significados que iluminam as relações da experiência vivida. "A essência de que trata a fenomenologia não é idealidade abstrata dada *a priori*, separada da práxis, mas ela se mostra nesse próprio fazer reflexivo" (Bicudo, 1994, p. 21).

Na pesquisa de orientação fenomenológica, considera-se importante mostrar cada um dos passos que percorremos para chegar às interpretações para que fique clara a compreensão que será explicitada no discurso do pesquisador. A *práxis* vai se revelando no fazer. Esse fazer traz elementos que são significativos para o pesquisador construir seus resultados do modo como ele o faz.

Neste capítulo, procuramos traçar o *desenho* do movimento reflexivo com o qual nos envolvemos na pesquisa. No capítulo seguinte, apresentaremos as análises, iniciando com os quadrados das *descrições*, na linguagem ingênua[38] do sujeito. Nele destacamos as *unidades de significado* que expressam o percebido pelo pesquisador na fala do sujeito entrevistado.

Tendo optado por preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, vamos nomear apenas Entrevista 1, para o primeiro sujeito e a Instituição a que ele pertence. Entrevista 2, para o segundo sujeito e sua Instituição e assim por diante.

Na seqüência do texto, organizamos o quadro de convergência das unidades de significado procurando tornar explicito o movimento que nos encaminha da *análise ideográfica,* ou dos individuais, para a *nomotética,* ou busca de generalidades que iluminam uma perspectiva do fenômeno investigado, até as *categorias abertas* ou grandes regiões de generalidades compreendidas e interpretadas pelo pesquisador.

[38] As descrições ingênuas do sujeito são assim consideradas por se tratar de uma linguagem espontânea do sujeito que não foi tematizada pelo pesquisador. Na linguagem ingênua, o pesquisador mantém a forma como o sujeito coloca sua experiência sem interferir no modo de ele se expressar.

Construímos, logo após o quadro das entrevistas, a *Matriz Nomotética*. Nela trazemos as asserções, já organizadas segundo a compreensão do pesquisador, e a sua localização. Desse modo, se é uma asserção do primeiro sujeito, identificada na unidade de significado número 3, ela será indicada por 1.3. Se ela for do quinto sujeito, e estiver na terceira unidade de significado, será 5.3 e assim sucessivamente.

Ao iniciarmos a construção do quadro de asserções, fomos percebendo que algumas delas apontam para mais de uma unidade de significado e são ditas por mais de um sujeito. Isso nos levou a um próximo passo na busca das convergências. Procuramos os *invariantes*, o que, nas asserções, dizem de uma mesma idéia. Construímos, então, uma nova tabela que traz esses invariantes percebidos e nos encaminha para as grandes convergências, para os invariantes que dizem da estrutura do fenômeno investigado. Nesta pesquisa, que também trabalha com a inserção da hermenêutica, encaminhamo-nos para um outro momento, que concerne à interpretação das ***Categorias Abertas***.

Capitulo IV: Análise dos Dados da Pesquisa

> *O uso mais antigo da palavra **análise** encontra-se em Homero e, exatamente, no segundo livro da Odisséia. Ela é usada ali para aquilo que Penélope faz todas as noites, a saber, desfazer a trama que ela tecera durante o dia. ἀναλύειν [analisein] significa aqui o desfazer de uma trama em seus componentes. Em grego significa também soltar, por exemplo, soltar as algemas de um preso, libertar alguém da prisão" (Heidegger, 2001, p. 140].*

4.1. A análise ideográfica: expondo as unidades de significados.

Iniciamos, neste capítulo, a apresentação do modo como "*desfazemos a trama*" do que investigamos na intenção de *libertar*[39] o sentido do que está sendo compreendido.

Começamos nosso movimento de *análise dos dados* trazendo o quadro construído com as *unidades de significado*.

A busca pelas unidades de significado inicia o movimento da *análise ideográfica* onde a intenção do pesquisador é *"produzir a inteligibilidade do fenômeno através do desocultamento das idéias"* (Machado, 19994, p. 40) que permeiam os discursos dos sujeitos.

Há, como dissemos anteriormente, um rigor metodológico que acompanha cada fase da pesquisa fenomenológica e a consideração essencial é a interrogação que orienta os passos da investigação. Essa busca, rumo à análise interpretativa dos dados, não se realiza no vazio e no indeterminado. Ela se lança

[39] Por ora, não nos deteremos na exposição do termo *libertar o sentido,* que estamos usando. Voltaremos a ele na seqüência do texto.

a um futuro com fundamento no presente e no passado das experiências vividas pelo pesquisador. Heidegger nos diz, acerca disso, que há um *fundo* sobre o qual a análise se edifica. Mesmo que esse fundo esteja, a principio, encoberto, ele já o é, e o "ir buscar" [Holen], o que nos dados se mostra, "é um tirar [Shöpfen] – (no sentido que se diz:) ir tirar água da fonte" (Heidegger, 1998, p. 81). Esse princípio deve ser autêntico, isto é, não deve ter o caráter de primitivo já que considera as experiências vividas pelo pesquisador, sua intenção na pesquisa e, sobretudo, sua condição de abertura para ouvir o dizer dos sujeitos. O pesquisador deve deixar que o sentido se revele, e, esse *deixar* requer uma atividade elevada, e não passiva, já que é nela que emergem as possibilidades de compreensão do que esta sendo investigado. O deixar emergir, *des-cobre*[40] o que esta presente nos dados e torna o conhecer possível. O olhar do pesquisador deve estar atento para o que, na mutabilidade do que encontra, permanece. Isso que na mudança permanece é o que lhe dará possibilidades de compreender o fenômeno que investiga.

As unidades de significado vislumbradas nas asserções dos sujeitos são, portanto, o que, nos diferentes dizeres, ouvimos permanecer. Nomeamos essas unidades de tal modo que pudéssemos, posteriormente, na análise e interpretação das categorias, trazer nossa voz, nosso modo de entender o fenômeno que investigamos. Essa nomeação considera nossas experiências vividas e o diálogo travado com os diferentes autores ao longo da pesquisa. As categorias abertas, com as quais iremos trabalhar na análise dos dados, são nomeadas pelo pesquisador que tem a intenção de expressar sua compreensão do fenômeno que investiga. Esses nomes já são, portanto, expressões do sentido que os dados começam a fazer para o pesquisador.

Assim é possível que, ao nomear as categorias abertas, o pesquisador deixe transparecer a identidade percebida entre as falas dos sujeitos, suas experiências vividas e o diálogo empreendido com os autores que discutem o tema investigado. Passamos por esse processo de análise e interpretação dos dados e nos sentimos envoltos no movimento descrito por Heidegger que

[40] O termo *des-cobre* está sendo usado no sentido de des-cobrir algo que, de início, está encoberto, ou seja, no sentido de des-velar, tirar o véu, deixar que ele apareça.

descreve o modo como o pesquisador se lança a um futuro com fundamento no presente e no passado. Não partimos de categorias prévias que dariam a condição sob a qual os dados da pesquisa pudessem vir a ser interpretados. A interpretação na pesquisa fenomenológica dá-se num movimento que se põe a si mesmo em questão. Esse questionar coloca o pesquisador no centro da pesquisa e o O faz perguntar por suas concepções, analisar o modo como compreende o que investiga e abrir-se ao que, nos dizeres de seus sujeitos, se lhe apresenta.

Segundo Heidegger, nessa fase da pesquisa, estamos imersos num certo modo de proceder que exige um "salto" e "saltar só pode, quem toma o impulso devido. E é nesse impulso que tudo se decide. Pois ele significa que voltamos realmente a investigar as questões. E é no mover-se das questões que se criam as perspectivas". (Heidegger, 1987, p., 197). O vislumbre dos passos futuros nos faz almejar que as perspectivas abertas pela nossa investigação nos permitam ultrapassar o limite inicial de compreensão. O modo como os sujeitos da pesquisa expressam o significado epistemológico que os diagramas assumem para eles é o que nos põe a caminho da redução fenomenológica em busca de clareza para a questão que estamos investigando.

Trazemos, na seqüência do texto, os primeiro passos dados para a compreensão dos dizeres dos sujeitos. Organizamos um primeiro quadro – quadro (1) - com as *Unidades de Significado* elaboradas a partir das entrevistas.

4.1.1. Entrevista 1 – Docente do Departamento de Matemática USP/SP – entrevista realizada em 26 de outubro de 2005

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
E1.1	A geometria é o protótipo da ciência dedutiva /.../ é muito forte esse aspecto dedutivo na geometria /.../ sempre se dá muita ênfase ao formalismo da teoria, até alertam que você usar a figura não faz parte da demonstração de um certo fato. Aquilo serve apenas como um auxílio que está ali em paralelo. Mas você não pode usar fatos que estão sendo induzidos pela figura. /.../ Então tudo isso vem por causa desse aspecto dedutivo da geometria /.../ mas existe um outro aspecto também que é muito importante no ensino da geometria que é o aspecto indutivo.	O sujeito afirma que, na geometria, vista como ciência, o aspecto dedutivo é muito forte e que sempre é dada ênfase ao formalismo. Porém, considera que a indução é importante no ensino da geometria. Afirma, ainda, que há um alerta sobre o fato de não se poder usar a figura como demonstração.
E1.2	Às vezes seria mais interessante, muito mais proveitoso para o nosso aluno, se ele pudesse, ao invés de receber um resultado pronto, chegar aquele resultado. Ao invés de “vamos provar o teorema do ângulo inscrito”, seria “vamos arrumar uma maneira de o aluno poder conjecturar aquele resultado”, de ele chegar no resultado. Porque na matemática profissional, em geral, se faz assim. A prova é conseqüência de um resultado que foi especulado, foi testado, usando outros recursos. E no ensino da geometria esse lado, esse aspecto indutivo da geometria eu acho muito pouco explorado.	No ensino, o aluno deveria poder conjeturar resultados ao invés de somente provar teoremas. O sujeito considera isso importante, porque, segundo ele, na matemática profissional, esse é o procedimento: a prova é conseqüência de resultados especulados e testados por outros recursos. Para ele, o aspecto indutivo, no ensino, é pouco explorado.
E1.3	É importante fazer o aluno construir figuras, ou com régua e compasso, ou usando algum software de construção geométrica /.../ hoje, existem muitos instrumentos para o aluno usar /.../ para conjecturar resultados. E aí sim, aí a figura entra de uma maneira fundamental, pois é o aspecto visual. Aquilo assume uma postura muito mais relevante do que quando você faz os aspectos dedutivos da teoria	O depoente destaca a importância de o aluno construir figuras, usando régua e compasso ou softwares geométricos, para conjeturar resultados. Nessa construção a figura é fundamental pois o aspecto visual assume uma posição relevante.
E1.4	Na produção do conhecimento matemático /.../ principalmente para a compreensão de resultados geométricos ainda é fundamental a	Para o sujeito, na produção do conhecimento

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
	<u>utilização dos diagramas</u>	matemático, os diagramas são fundamentais para a compreensão dos resultados geométricos.
E1.5	Tem uma teoria em geometria diferencial, chamada teoria das superfícies mínimas /.../ para a qual se buscava um exemplo de uma superfície desse tipo que tivesse uma mesma propriedade que é a que o catenóide tem (não ter auto intersecções e ter curvatura total finita). /.../ Celso Costa (na época doutorando do ITA) não estava procurando exatamente esse exemplo, estava pesquisando outras coisas e apresentou um exemplo de uma superfície, mediante equações, e você sabe que é muito difícil tendo equações de superfícies /.../ fazer o desenho. /.../ . Ele conhecia o desenho, mas a superfície tinha assim um certo miolo que era extremamente complicado. /.../ Ele conseguia, a partir das equações, fazer inclusive o desenho na mão. /.../ Mas ficou essa questão da pergunta o que era o miolo. /.../ David Hofmam (matemático americano, membro da banca de Celso Costa) levou adiante o projeto e <u>colocou aquelas equações no computador para investigar</u>. /.../ <u>A princípio ele não enxergava muita coisa na tela do computador, mas rodando a figura, colocando-a em outras posições, ele começou a perceber algumas simetrias.</u> Parecia que a figura tinha alguns planos de simetria e, <u>a partir dessas indicações,</u> que o computador estava lhe dando, ele <u>começou a tentar mostrar, a fazer a conta algebricamente</u>.	O sujeito afirma que uma teoria da geometria diferencial foi investigada com a visualização possibilitada pelo computador. Relata que o investigador, inicialmente, não conseguia fazer um desenho em que o âmago ou o centro da figura fosse revelado a partir das equações que tinha. Porém, uma segunda pessoa se interessou em investigar o assunto e, com o auxílio do computador, com a figura gerada num software de geometria dinâmica, obteve indicações para construir uma demonstração algébrica.
E1.6	<u>Hofmam agiu exatamente como um matemático profissional. Ele usou o desenho</u>, no caso, ele usou o computador apenas como um indicativo de uma certa propriedade. O computador <u>mostrou para ele um caminho:</u> “olha talvez aqui tenha algo”. <u>A partir daí, com o conhecimento matemático que ele tinha, ele conseguiu provar.</u>	A atitude de quem investigava a figura gerada no computador, era a de um matemático profissional que vê, na figura, um caminho, e, a partir de então, articulando o conhecimento matemático, consegue efetuar uma prova matemática válida.
E1.7	<u>A álgebra realmente não precisa desse recurso, mas eu acho também uma pena</u>. Nos meus cursos de álgebra que eu fiz aqui /.../ eu nunca	Mostra sua surpresa quando, num curso de álgebra, sobre teoria dos

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
	vi o professor fazer uma figura na lousa, nunca vi./.../ Depois, já na pós-graduação, fiz um curso de teoria dos grupos com outro professor. Para mim foi um choque quando, na primeira aula, o professor foi à lousa /.../ e começa desenhando um quadrado. Ele desenhou um quadrado e a partir do quadrado ele começou a desenhar os eixos de simetria do quadrado. E o que ele queria com aquilo era achar o grupo das simetrias do quadrado. Para mim aquilo foi /.../ muito esclarecedor porque o professor mostrou pra gente que, embora o curso fosse estudar uma estrutura bastante algébrica, poderíamos, assim mesmo, ter como recurso a geometria	grupos, o professor começou pelo desenho de um quadrado para determinar o grupo de simetrias. Afirma que, mesmo na álgebra, o recurso à geometria foi muito esclarecedor.
E1.8	Recentemente, estive com um livro de geometria da Springer /.../ para o curso superior que discute geometria euclidiana, geometria hiperbólica, geometrias arquimedianas. /.../ O texto é recheado de figuras. E mais ainda foram feitas a mão pelo próprio autor. Ele fez questão de fazer. Ele não permitiu que as figura fossem feitas usando recursos computacionais ou recursos gráficos. Ele fez questão de, ele mesmo, fazer as figuras do livro. E ele /.../ justifica indo /.../ um pouco na direção disso, do papel dos diagramas, pois ele faz questão de construir, com régua e compasso, as demonstrações que ele está fazendo. /.../ Em um certo momento ele apresenta a axiomática do Hilbert. /.../ A partir desse momento ele faz as provas de uma maneira mais formal, mas as figuras acompanham o texto. Ao longo do texto as figuras fazem parte do acompanhamento para o entendimento das demonstrações. Evidentemente não como parte da prova, mas como parte do entendimento.	O entrevistado diz que teve, recentemente, contato com um livro ilustrado a mão, pelo próprio autor. Afirma que há uma opção do autor por construir as figuras, usando régua e compasso, porque considera que, embora elas não sejam parte da demonstração, elas são inerentes ao entendimento da demonstração.

4.1.2. Entrevista 2 – Docente do Departamento de Matemática Aplicada UNICAMP/SP – entrevista realizada em 03 de novembro de 2005

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
E2.1	Sem dúvida os diagramas fazem parte da minha vida. Eu sou bastante geométrica nas minhas argumentações. Então quando eu estou pensando um exemplo, mesmo em minha área de trabalho, de utilização, eu gosto de pensar uma situação mais simples possível, mais baixa possível, em R em R^2 em que eu possa fazer um desenho e ter um sentimento do que esta acontecendo ali	O sujeito afirma que os diagramas fazem parte de sua vida. Busca pensar em situações mais simples possíveis em que possa fazer um desenho para ter a percepção do que está acontecendo.
E2.2	Nas aulas eu percebo que é uma ferramenta de apoio muito importante para os alunos, de ajuda para a compreensão. Então os desenhos, as figuras, os diagramas, os gráficos, tudo isso faz parte bastante das minhas aulas, das minhas explicações, quer seja no cálculo ou na geometria analítica. É um pouco mais difícil na álgebra linear, mas quando é possível fazer uma interpretação geométrica eu procuro fazer e lançar mão de uma figura, na geometria plana sem dúvida.	Vê os diagramas, as figuras e os gráficos como uma ferramenta de apoio muito importante nas aulas de cálculo e, especialmente, nas de geometria, embora também veja a sua importância na álgebra linear. Enfatiza que nas aulas de geometria plana, é inquestionável o recurso às figuras.
E2.3	É um recurso muito usado nas minhas pesquisas e nas minhas aulas.	Afirma que os diagramas são um recuso muito usado em suas pesquisas.
E2.4	[Nós] estamos trabalhando com atividades computacionais e projetos no ensino de cálculo e, sem dúvida, o que nós trabalhamos no computador é a visualização /.../ dos gráficos, das parametrizações, das curvas, das superfícies. Os teoremas importantes do cálculo, [tais como] teorema de Green, de Gauss, Stokes na questão da visualização é um trabalho que mostra bastante nossa trajetória nesse percurso com o computador.	Em projetos de ensino de cálculo trabalha com a visualização, via computador, de gráficos e das parametrizações das curvas. Destaca que essa visualização, favorecida pelo computador, é bastante utilizada para teoremas importantes do cálculo.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
E2.5	Você produzir uma figura no computador, produzir um gráfico e só ainda é pouco, você tem que tirar o que você puder daquela figura, então fazer as perguntas, conseguir responder /.../ o que a gente retrata aí, é a busca do significado daquele diagrama para o aluno. É a interpretação, o que ele pode tirar, é a leitura dele. Porque é mais do que simplesmente enxergar, é fazer sentido. /.../ o fato de [o aluno] poder olhar de várias maneiras e extrair dali as informações, poder pensar o sistema linear como a interseção das retas e a solução única aquele ponto ou o gráfico e aquela janela e o que significa pensar se a tua variável é, por exemplo, uma porcentagem, você está fazendo em R todo o seu domínio, mas você só quer pensar no intervalo [0, 1] e assim por diante, coisas simples assim, mas, como você pode trabalhar.	A construção da figura ou do gráfico no computador deve ser seguida de uma interpretação pelo aluno, em busca do sentido daquele diagrama. O sujeito vê que não é simplesmente enxergar a figuras mas sim é um recurso para a busca do sentido da situação. Ele entende que o computador pode permitir que o aluno visualize de diferentes modos, pensando com exemplos simples.
E2.6	Num outro curso em que eu trabalhei bastante com recurso visual foi desenho geométrico e geometria plana porque, é claro, não há dúvida, que aí é muito forte.	O sujeito afirma que, nos cursos de desenho geométrico e geometria plana, o recurso visual é muito importante.
E2.7	Eu percebi que essa combinação das linguagens, da linguagem computacional, com a visual, a pictórica da imagem e a linguagem escrita, toda essa combinação, esse conjunto pode produzir muito conhecimento sim. Porque mais do que a figura, pois ela pode falar uma coisa para mim e outra para você, mas quando nós vamos trocar, escrever e colocar nas nossas palavras, nós vamos tentar ganhar um compromisso para tentar explicar melhor.	O sujeito afirma que é necessária uma combinação de linguagens: computacional, visual, pictórica, escrita, para a produção de conhecimento. Compreende que a figura pode admitir interpretações distintas para sujeitos distintos, mas a forma escrita requer um compromisso maior com a explicação.
E2.8	Não basta você ficar só na exploração. Então a idéia é construir uma base, fazer exploração, concretizar um resultado de uma maneira visual, exploratória e depois conseguir justificar. Mas isso não é uma passagem fácil. O que percebemos é que a visualização ajuda, estimula, favorece para alguns. Outros que já tem a mente	A exploração visual concretiza um resultado e constrói uma base para a justificação. A visualização é uma ajuda, um estímulo que pode favorecer alguns

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
	mais "organizadinha" eles deslancham muito bem, mas não é uma mágica. Além de não prescindir, de não deixar o fato de que só porque eu vi na construção dinâmica já está mostrado, eu tenho que passar pelas etapas de justificar os procedimentos sim, mas seria um fechamento. Nas atividades eu sempre pedia esse fechamento: um pequeno relatório, uma prova, uma construção com régua e compasso *a posteriori*, alguma maneira dele fechar.	alunos mas, para o sujeito, também é necessário justificar os procedimentos como se fosse uma conclusão das atividades. Entende que essa conclusão pode ser dada por um relatório, uma prova ou uma construção com régua e compasso posterior a exploração dinâmica.
E2.9	é necessário encarar a figura de modo que você possa tirar proveito dela, mas não fazer de conta que a figura já me mostrou tudo. /.../ tem esse lado dessa coisa enganosa, mas acho que na minha experiência, por eu gostar do desenho, porque eu acho que o desenho fala mais do que mil palavras, então eu tenho essa sensação e muitas vezes eu peço para o aluno fazer um esboço daquilo que ele está querendo explicar, mas explicar também.	Enfatiza que, embora a figura e o desenho expressem muito mais que as palavras, eles não podem ser tomados como uma explicação final. Há, na figura, o aspecto enganoso e é preciso que o aluno, mesmo fazendo um esboço do que está querendo dizer, também o diga de modo explicativo.
E2.10	A figura pode ser um rabisco, mas muitas vezes ele está explicando e fala: veja como eu fiz aqui no desenho, ou ele faz um zoom. As leituras do texto ficam então muito mais ricas quando você vê uma figura. A figura pode ser um apoio para você começar a se fazer perguntas. Penso que é isso que buscamos a mais com os alunos quando trabalhamos dessa maneira	As figuras são apoio para desencadear a investigação e o sujeito acredita que isso é importante no ensino. A figura pode servir como apoio para que o aluno investigue as situações e isso é o que se busca ao se trabalhar em sala com diferentes recursos de expressão.
E2.11	Agora mesmo estamos fechando um trabalho de pesquisa de complementaridade em cones e, num primeiro momento, estávamos falando de cones em R^n, problemas de complementaridade tudo muito abstrato, embora de dimensão finita. Não estamos nos espaços de Hilbert onde não poderíamos enxergar nada, mas mesmo assim, apesar de estarmos pensando em dimensões	O sujeito diz que, em sua pesquisa atual, que trabalha com complementaridade em cones, busca exemplos em dimensões mais baixas para enxergar, concretizar e ver o que

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
	mais altas, fomos buscar um exemplo em dimensão 2 onde pudéssemos enxergar, concretizar e ver o que estava acontecendo para poder ampliar nossa teoria e isso nos ajudou bastante a ter outras idéias e a interpretar o que estava acontecendo. E é isso que falamos para os nossos alunos também: pensem num exemplo pequeno. Ele está programando um algoritmo e como que isso está funcionando? Você fez um exemplo pequeno? Você olhou como é que estava indo sua seqüência, os pontos? Pegou uma função que você já sabia o que ia acontecer e aconteceu o que você esperava? Se não funcionou será que você não entendeu o algoritmo? É o algoritmo que está com problema? É uma coisa da sua programação, do entendimento, do problema? Onde é que está a falha? Alguma coisa tem que estar seguro nas suas mãos para poder analisar as outras variáveis. Então nesse sentido eu acho que os diagramas, as figuras, os desenhos ajudam bastante.	acontece. Isso favoreceu a ampliação da sua teoria e as figuras auxiliaram para que ele tivesse outras idéias e interpretasse o que acontece ao longo das diferentes situações. Afirma que incentiva seus alunos a fazerem o mesmo que ele faz na produção matemática. Ou seja, ele incentiva seus alunos a buscarem exemplos pequenos que possam lhes dar a segurança para analisar outras variáveis. Para o sujeito as figuras, os desenhos, ajudam bastante tanto para dar segurança do que está sendo feito quanto para analisar as situações investigadas.

4.1.3. Entrevista 3 – Docente do Departamento de Matemática Aplicada UNICAMP/SP – entrevista realizada em 03 de novembro de 2005

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
E3.1	Eu sou da área de Topologia/.../ e eu não consigo imaginar nada sem figuras. Nada sem uma imagem, acho que não tem como; mesmo que não seja relacionado à geometria. Tem que ter uma imagem, tudo. Um gráfico ele ajuda muito a entender alguma coisa.	O sujeito afirma que não consegue imaginar nada sem figuras, sem uma imagem. Considera que mesmo não sendo relacionado à geometria, tem que ter uma imagem. Um gráfico também ajuda a entender idéias, segundo o sujeito.
E3.2	Em geometria, por exemplo, as construções geométricas, se você tem um exercício que pede para construir um triângulo conhecido algumas coisas o que fazemos? Nós fazemos um esquema antes. Se não fizer no papel, com certeza está fazendo na cabeça. Quer dizer, para mim é assim, eu não consigo imaginar de outra forma. Impossível uma pessoa que vai construir não imaginar alguma coisa, fazer um esboço para depois chegar no que está sendo pedido. Acho que nós temos isso na cabeça eu não consigo imaginar sem isso.	O sujeito afirma que, nas situações de geometria que solicitam construções, fazemos antes um esquema, seja ele desenhado no papel ou na imaginação. Considera impossível alguém que vá fazer construções não imaginá-las antes, não montar um esboço para chegar no que é pedido. Acredita que temos isso na cabeça.
E3.3	Também o que tem ajudado, em minha opinião, são os programas de computação/.../ Eles ajudam na visualização e na própria construção da figura porque, às vezes, você faz uma figura e você não sabe fazê-la muito bem. Você faz um rabisco e, às vezes, isso te engana, você acha que é uma coisa e quando você vai ver "direitinho".	O sujeito considera que os computadores ajudam na visualização e na construção de figuras, pois permitem uma maior precisão no traçado de figuras, para que não sejamos enganados por elas.
E3.4	Uma demonstração você tenta, pensa uma figura, com aquilo, o que vai ser a demonstração, o que você pode tirar dali e daí você vai formalizar. Mas é importante você formalizar porque às vezes você pode estar vendo uma coisa errada, então tem que tomar cuidado, tudo tem que ser provado, mas sem a	O sujeito afirma que para fazer uma demonstração ele tenta, pensa uma figura, retira dali as informações e então formaliza. Ressalta que a formalização é importante porque, às vezes, o que se está vendo pode estar errado.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
	figura não tem condições.	
E3.5	[na produção em topologia] quando a gente está pensando você usa tabelas, "desenhinhos" e tudo, mas aí quando você vai redigir você tira isso. Até alguma coisa que você montou, desenvolveu através de um cálculo, de um monte de dados, aí você percebe uma generalização e você vai escreve a generalização e não coloca tudo aquilo, mas tudo aquilo foi importante para você chegar ao resultado final. Então você não coloca no artigo essa parte e até a gente guarda porque, de repente, a gente precisa mais daquilo do que do artigo escrito no final. Sem aquilo eu não ia conseguir chegar ao resultado, descobrir isso. Eu não. Pode até ser que tenha quem consiga, mas eu não, sem os esquemas eu não conseguiria e, às vezes, com os esquemas é mais fácil para você passar para outras pessoas, também, se você quiser. Isso falando de esquemas, não de tabelas.	O sujeito afirma que a escrita final da produção em topologia não revela o processo de construção. Os cálculos, as tabelas e os desenhos são importantes para perceber a generalização, mas não aparecem na escrita final de um artigo, por exemplo. Tudo isso é, segundo o sujeito, guardado, porque, normalmente, é mais necessário que o próprio artigo já que, sem isso, não seria possível chegar ao resultado e a descoberta. O sujeito enfatiza, ainda, que não conseguiria sem os esquemas e que eles auxiliam, inclusive, na comunicação dos resultados aos outros.
E3.6	Você me fez lembrar uma vez que tinha uma aluna de iniciação científica e ia ter uma apresentação de trabalhos. /.../ Ela organizou um esquema e conseguiu uma maneira bem objetiva de colocar na transparência e aquilo ficou ótimo./.../ Ela inseriu umas figuras, fez uma apresentação bem visual, era um assunto bem teórico, e ela conseguiu passar aquilo nos dez minutos de uma forma muito boa. Então você vê, são os esquemas. Eu acho que em tudo os esquemas são importantes.	O sujeito relata uma experiência vivida com uma aluna de iniciação científica que usou esquemas, tabelas e figuras para apresentar um assunto teórico de um modo visual que ficou bastante acessível. Salienta a opinião de que, para ele, em tudo, os esquemas são importantes.
E3.7	E, também, geometria sem figuras eu acho que, agora voltando, não tem nem como. Embora sempre temos que provar para não cair naquelas falácias	O sujeito afirma que não é possível pensar em geometria sem figuras. Ressalta, porém, que a figura não serve como

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
	/.../ A figura não serve como demonstração. Ela serve para ver de onde surgiu à idéia, nesse aspecto é muito importante.	demonstração. Ela mostra de onde surge a idéia e isso é um aspecto muito importante.
E3.8	Mesmo na história, muita coisa surgiu dessa forma, você parte do concreto, de uma figura e depois tenta formalizar./.../ . Ninguém lançou na forma de equações, já tudo pronto. Veio passo a passo até chegar num nível formalizado. Por isso que eu acho importante quando você vai dar aula, mostrar desde o começo que é isso aí que foi o princípio de todos os passos, ver na prática, o visual, o concreto para desenvolver um raciocínio e chegar onde precisa.	O sujeito afirma que, historicamente, o processo de construção passa por figuras, tem uma parte concreta que antecede a formalização. Por isso, no ensino, considera importante tomar como base o visual para desenvolver um raciocínio que leve à generalização.
E3.9	Mesmo o matemático. É uma coisa que ele não abandona mais. Ele sempre vai buscar lá para poder chegar no objetivo final, ele vai buscar lá na figura, no concreto, sempre toma algumas coisas assim, por mais abstrata que seja a teoria que você esta desenvolvendo sempre existe alguma "coisinha", um exemplo simples que, quando você vai tentar provar qualquer coisa o caminho é esse se você vai tentar fazer alguma coisa nova, de você pegar exemplos e exemplos simples para você ver ou, seja no caso de figuras ou na parte de números, você vai pegar exemplos simples.. Na geometria mesmo, se é uma coisa mais complicada você pega exemplos simples, coisas palpáveis, para depois ir para o mais abstrato e verificar se aquilo vale em geral. Mas sempre você precisa por o pé no chão, primeiro. Ta valendo aquilo. É claro que você não pode parar ali, você tem que ir caminhando, mas você vai buscar a idéia lá no início, vai fazendo vários casos para depois chegar num produto final que é uma coisa já geral mesmo onde você não coloca todos os casos usados porque foram casos particulares que foram estudados para perceber que	O sujeito afirma que mesmo o matemático profissional não abandona a figura. Ele a utiliza para poder chegar no seu objetivo. Considera que por mais abstrata que seja a teoria desenvolvida, o matemático busca, primeiramente, exemplos simples que lhe permitam ver. Ressalta que mesmo na geometria, quando a teoria é mais abstrata, se busca exemplos simples para depois verificar os casos mais gerais. As idéias são buscadas no início. São feitos vários casos particulares, muitas variações para se perceber que vale o caso geral.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções
	vale o geral.	
E3.10	Às vezes mesmo que você não faça a figura no papel ela está ali, na tua cabeça. Você a imagina. E no ensino eu acho fundamental você usar a figura. Em geometria mesmo, não tem como prescindir da figura./.../ É claro que num certo momento é bom que você se afaste das figuras... assim... não da figura, porque eu acho que na cabeça da gente ela nunca sai. Se afaste de fazê-la no papel, se afaste de não precisar de um modelo concreto, palpável, manipulável.	O sujeito re-afirma que a figura, mesmo que não seja construída no papel, é imaginada. Afirma ser o uso da figura fundamental no ensino, pois, em geometria, não tem como prescindir da figura. Destaca que há um momento, no ensino, onde devemos nos afastar dos modelos concretos, palpáveis e mesmo das figuras desenhadas no papel. Porém, volta a enfatizar que, mesmo não desenhando no papel, as figuras permanecem em nossas cabeças (ou na nossa imaginação).

4.1.4. Entrevista 4 – Docente do Departamento de Matemática USP/SP – entrevista realizada em 22 de dezembro de 2005

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
E4.1	No que diz respeito ao ensino eu acredito que isso pode fazer com que o individuo acabe se dando conta de uma trama de articulações, de elementos combinados que não é trivial e que pode servir para melhorar o seu próprio entendimento do que está envolvido naquela apreensão que parece ser instantânea e imediata.	O sujeito afirma que, no ensino, as figuras permitem perceber as articulações de elementos que podem servir para melhorar o entendimento da situação que, a princípio, parece instantânea.
E4.2	/.../ tomar isso (referindo-se as figuras) como trivial é como algo que não seja merecedor de análise, de atenção, como se não tivesse elementos dentro disso, como se já fosse elementar, não tivesse uma série de elementos que são protagonistas de uma sustentação disso que, aparentemente, é imediato, aí é falta de percepção /.../ e que tem seu prejuízo,	Tomar as figuras como triviais é tomá-las como o que não é merecedor de análise por serem elementares, ou seja, por serem algo que não têm elementos em sua composição que sejam merecedores de atenção.
E4.3	[não se deter às evidências geométricas] <u>é uma perda de oportunidade rica de possibilidades para re-qualificar tudo o que vem em seguida</u>. Porque a primeira coisa é a relação entre números e formas. Os números não estão nas formas, quer dizer, quando eu adiciono dois segmentos, ou duplico, ou triplico segmentos, faço um número inteiro de vezes um segmento, existe uma operação de natureza geométrica que é de translação, para começar. E uma "re-plicação", ou seja, uma reiteração da aplicação da mesma operação. Essa aplicação de um certo número de vezes é na operação. Ela não está no segmento. É numa relação... quer dizer, um segmento e seu transladado estão relacionados por uma translação, por uma certa operação ou uma função, uma correspondência entre pontos. /.../ <u>Esse padrão básico de reiterar uma</u>	Afirma que, se não nos detemos às evidências geométricas, perdemos a oportunidade de re-qualificação do que vem a seguir. Tomando como exemplo a translação de segmentos, o sujeito afirma que as operações de transformação fazem uma mediação bastante fértil entre o campo numérico e geométrico. Ele destaca que ao se transladar um segmento podemos ver tanto o aspecto numérico: o número de vezes que a operação é aplicada, quanto o geométrico: o resultado produzido pela operação que prova o deslocamento. Adverte que ao reduzir precocemente as relações geométricas a números leva a uma perda da riqueza da própria geometria já que muda o campo cognitivo e nos afasta do desenvolvimento de um campo que é propriamente geométrico. .

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	certa operação serve de apoio a muitos outros objetos e não somente a números. Ou seja, é um padrão básico que é partilhado por vários campos e não só pela geometria. Na geometria ele dá dividendos especiais, quer dizer, existe uma intimidade, um certo conjunto de relações entre os entes geométricos, que a mediação dos números é extremamente fértil. Mas reduzir tudo precocemente a relações entre números é perder a riqueza da própria geometria, porque eu acho que você muda de campo cognitivo, você tenta reduzir um campo a outro, e isso já é uma perda, e se afasta da maturação, da expansão, do desenvolvimento daquele campo propriamente geométrico	
E4.4	Então tudo se traduz em números e aí se acaba constatando que, quando se ensina, inclusive quando se conversa com colegas profissionalmente já estabelecidos, consagrados, chamados geômetras, muitas vezes eles têm determinadas capacidades de apreensão, de perceber que existe um outro campo que não está totalmente incorporado, reduzido ao campo algébrico, ao campo analítico e que essas capacidades, por não estarem sendo ativadas, ficaram atrofiadas /.../ como qualquer capacidade anatômica ... acabam atrofiando se não são exercitadas.	Afirma que reduzir tudo a números leva os geômetras, mesmo os já consagrados profissionalmente, a terem sua capacidade de percepção do campo geométrico reduzida. Enfatiza que essa capacidade geométrica, por ceder lugar ao campo analítico, acaba atrofiada.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
E4.5	Tratar disso assim dá um certo trabalho/.../, porém a recompensa supera em muito o investimento./.../ é o aspecto de multiplicar conexões, diversificar possibilidades de transferência, de pontes entre campos diversos e ganhar mais entendimento de cada um a partir das relações com os outros. não se ganha só na inteligibilidade e na riqueza. Se ganha, também, nos aspectos matemáticos. Se ganham nos dois lados, quando você enriquece as suas diversidades de alternativa de entendimento num estado espontâneo, sua imaginação fica mais ativada, mas também mais amparada tecnicamente. Você traduz tecnicamente, você consegue entender melhor como é que as formulações técnicas formais têm origem em cada um desses campos, como é que elas se expressam a partir desses campos e ao mesmo tempo em que se conecta o técnico com o campo de ocorrência cognitiva ou o momento vivo da apreensão, distinguem-se as duas coisas e se conectam as duas coisas. Se ganha de vários lados, pois se tem um conhecimento de onde teria vindo e pode se levantar questões que são pertinentes ao campo de apreensão, pertinente ao campo técnico, pertinente as conexões e não fazer uma confusão total	O modo de tratar com os objetos matemáticos, vendo-os em diferentes campos, sob perspectivas diversas, leva a um ganho, tanto no que diz respeito à inteligibilidade e riqueza, quanto nos próprios aspectos matemáticos que se enriquecem dadas as opções de entendimento. A diversidade de opções de entendimento, para o sujeito, ativa a imaginação e ampara tecnicamente a pessoa que se envolve com a matemática. Tanto a imaginação fica mais ativada quanto amparada tecnicamente. A conexão entre o campo técnico e o campo de ocorrência cognitiva, ou o momento vivo da apreensão, leva a um conhecimento da origem das formulações técnicas e permite levantar questões que favoreçam a relação entre o campo de apreensão e o campo técnico, com compreensão.
E4.6	Às vezes nem está muito claro como é que dentro dos axiomas, dos pressupostos, do arranjo teórico, o que é evidente está representado lá. Quer dizer, o que é tomado como evidente já se passa por cima e, com isso, se acaba empobrecendo o que vem depois. Falta aquela riqueza mais orgânica no sentido de que pode se traduzir, inclusive, em termos técnicos. Falta a discussão fenomenológica,	O sujeito afirma que, não se tem muito claro como o arranjo teórico que seria aparentemente evidente, se faz presente em axiomas e pressupostos utilizados numa certa tarefa matemática. Isso porque, no ensino, o que é considerado evidente é desprezado. Esse desprezo leva a um empobrecimento da compreensão. . Falta uma discussão que pode, de início, ser mais livre e que leve a uma riqueza de discussão e

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	cognitiva, inclusive tecnicamente. Você pode começar falando mais livremente para tentar apreender como é que as coisas acontecem	compreensão, inclusive técnica.
E4.7	Por exemplo, quando eu comecei a estudar álgebra linear. Álgebra linear, digamos, pela simplicidade da aparência, da forma aparente, fica mais fácil saber do que está se falando, pelo menos o objeto apresentado diante de si. Quer dizer, quais são as regras e tal. Não ficam coisas incertas, pressupostas. Os dados estão ali. Toda a riqueza de semântica, de possibilidades, aplicações, são reforços. Não é evidente de imediato de quantas formas ela pode se desdobrar em termos interpretativos. Em geral os textos têm um certo repertório de equações diferenciais, sistemas algébricos, algumas aplicações da geometria. Quando eu vi isso, fiquei contente porque eu nunca tinha visto uma geometria apresentada de modo que partisse das relações geométricas. Então ela se re-construiu dentro de um cenário algébrico. Então eu fiquei contente num primeiro momento porque as outras construções ficavam sempre incertas em relação ao que faltaria para completar de modo claro a estrutura lógica. Não apenas do ponto de vista da exigência lógica, mas do ponto de vista de conciliar a lógica com aquilo que seria o objeto intencional, foco de estudo.	Afirma que, ao estudar álgebra linear, tema que considera de aparência simples, isto é, clara em sua forma de apresentação, ficou contente pois nunca havia visto uma geometria apresentada a partir das relações geométricas. Essa apresentação fez com que a geometria se re-construisse dentro de um cenário algébrico e isso foi motivo de contentamento dado que as outras construções não permitiam perceber, de modo claro, a estrutura lógica com o objeto intencional, foco de estudo.
E4.8	Sempre se alerta: "não se pode depender da figura para as demonstrações. É só um alerta! Mas não é um pecado olhar para a figura. Pelo contrário, você está sempre se motivando e, mesmo quando se está trabalhando numa coisa muito abstrata, topológica, em n dimensões, você faz um rabisco,	Afirma que embora haja um alerta para que as figuras não sejam usadas como demonstrações elas devem ser olhadas porque motivam as conexões. Mesmo que as situações sejam abstratas as figuras podem ser apoio sugestivo, um acionador cognitivo de relações.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	um apoio sugestivo para acionar alguma conexão. Ou seja, você está no campo abstrato mas, ainda assim, é um acionador cognitivo de relações".	
E4.9	/.../ quando se está num campo onde as coisas são difíceis de se distinguir, a figura que você desenha é muito próxima daquela que você está querendo reconstruir logicamente, aí fica difícil separar, distinguir. Quer dizer, as apresentações da geometria que eu tinha acesso, normalmente eram enunciados muito simplificados e alguns procuravam se apoiar na figura. Como se fosse algo do tipo: você está enxergando? Então é isso. Não se conseguia distinguir o que deveria ser a reconstrução lógica, a figura propriamente e ter um meio de conferir, de examinar se o quanto eu tenho ali apreendido na figura e o que eu quero reconstruir logicamente podem ser conferidos como sendo objetos de uma operação fiel e tal. Nada disso pode ser tematizado dessa maneira, fica tudo confuso. Quer dizer, se você enxerga alguma coisa então você já fica satisfeito porque você se situou. Não tem nada de mal nisso, mas assim, num momento um pouco seguinte, onde se tenta avançar no sentido de tentar distinguir as coisas e ver o âmbito de cada coisa, aí cabe, sem deixar a figura de lado, pelo contrário, até você re-qualifica melhor porque fica claramente distinguido o que é do campo da apreensão imediata, que e quais aspectos estão na reconstrução racional, lógica e de que modo você pode fazer essa aferição	Afirma que as apresentações da geometria que tinha eram feitas a partir de enunciados muito simplificados que se apoiavam na figura e não permitiam distinguir o que deveria ser a reconstrução lógica e o que era da própria figura. Esse modo de apresentação não permitia um meio de conferir, de examinar se o que é apreendido na figura, e o que se deseja reconstruir logicamente, pode ser conferido como objetos de uma operação fiel. Afirma que, embora a figura não possa ser deixada de lado, nada pode ser tematizado apenas com base no que é apreendido na figura pois fica confuso. Destaca que, muito embora a figura não deva ser deixada de lado, ela deve ser tomada de modo que ajude a re-qualificar o que foi apreendido e a distinguir o que é do campo da apreensão imediata, e o que é reconstrução racional.
E4.10	Você não vai desmerecer nada, nem a figura, nem querer reduzir uma cosia a outra, nem abandonar alguma porque foi usada como ponto de apoio, de partida. Quer dizer, se devidamente usada e	Afirma que nada deve ser desmerecido mas também não pode haver a redução de uma coisa a outra. Depois de entendida (a figura) como objeto de motivação da construção

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	sabendo o seu *status* e em que momento você faz um deslocamento de campo e vê: bom, agora está entendido isso aqui dentro do objeto que seria o objeto de motivação da construção racional, então onde que eu encontro isso lá, como é que eu posso distinguir e aferir se tem a conexão que eu estou pretendendo que tenha	racional é preciso buscar o modo de distinção e conexão com o que se pretende, passando do campo perceptivo ao demonstrativo. .
E4.11	você vai se conscientizando que você tem essas capacidades distintas, mas que elas estão todas meio confundidas, superpostas e se você não diferencia para depois integrar novamente, num campo maior, você perde uma série de recursos e a própria riqueza da diversidade que existe potencialmente oferecida, não afirmadas de modo taxativo como se devesse ser acreditada, mas que pode ser, da mesma forma que você observa regularidades e chama a atenção no mundo fenomênico, físico, biológico, cosmológico, qualquer campo de investigação científica, com um método científico, você pode também planejar experimentos ou vivências, aprendizados, compartilhamento de constatações desse processo todo, e submeter a exame se é assim mesmo ou não é.	Afirma que temos uma série de capacidades distintas que dão uma riqueza de diversidade e não podem ser afirmadas de modo taxativo como se devessem ser acreditadas. Essa diversidade permite o planejar de experimentos, vivências e aprendizados onde sejam compartilhadas constatações que possam ser submetidas a exames posteriores, que verifiquem a veracidade do que foi obtido.
E4.12	se está perdendo a riqueza de coisas que são tomadas como banais, como sendo desprovidas de riquezas /.../ as pessoas dominam tecnicamente uma certa faixa daquela estrutura complexa, matemática, mas são completamente insensíveis ou cegas para outros aspectos que estão naquele campo sofisticado porque elas têm o domínio técnico daquelas coisas, mas lá atrás, na base, ela desconsiderou, tomou como não sendo importantes certas coisas que são extremamente constitutivas do que veio a ser toda essa formulação	Afirma que, por certas coisas serem tomadas como banais, como desprovidas de riquezas, está-se perdendo muito. Para o sujeito há pessoas que dominam uma estrutura matemática complexa mas que são insensíveis a outros aspectos também presentes em formulações matemáticas. O que é tomado como sem importância, segundo o sujeito, pode ter sido, na base da construção, constitutiva da formulação matemática sofisticada. Ressalta que, mesmo que, às vezes, seja necessário considerar a

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	sofisticada da matemática, às vezes embutido de modo indireto. As pessoas pegam a formulação já tratada tecnicamente que, às vezes, é até necessário para você se restringir, pois não dá para abranger tudo, mas, pelo menos, precisa desconfiar um pouco de que nem tudo está circunscrito àquela formulação.	formulação técnica por questões de restrição de âmbito, é preciso ver que há outros elementos que não estão naquela formulação e têm igual riqueza de significados.
E4.13	Às vezes a pessoa atende a um aspecto técnico lógico e de domínio técnico que é necessário para utilização nas pesquisas /.../ e, ela própria, naquilo que é eficiente e tem sucesso, fica contente e vai para frente. Ela fica um pouco cega dentro do seu metabolismo cognitivo. Ela não se percebe. Não se dedica, porque falta tempo ou porque ela está tendo sucesso, na medida em que ela tinha expectativa de sucesso, já está satisfeita e deixa de exercer uma capacidade de reflexão. Não é reflexão racional. É aquela .. com o mesmo grau de atenção e de cuidado que seria necessário para um pesquisador ... é o aspecto de auto-observação.	Afirma que a possibilidade do contentamento com o domínio técnico e lógico necessário à utilização nas pesquisas pode cegar o pesquisador para sua própria cognição. O sucesso alcançado leva à satisfação e isso impede o pesquisador de refletir de modo atento e cuidadoso sobre o seu próprio fazer. O sujeito enfatiza que essa reflexão não é racional, mas uma auto observação do fazer.
E4.14	Se você não se enxerga observando uma parte do que você observa está sendo perdido. Você pode ter eficácia pelo instrumental recebido naturalmente, sem nenhum esforço, ele é acionável e você se vale dele, mas não se detém a observar quais elementos estão envolvidos, que operações, que deslocamento, às vezes, que saltos mortais são dados de um campo para outro com analogias improváveis que, às vezes, acabam dando muito resultado. Mas, mesmo quando uma analogia inconsciente é feita, você passa, retrospectivamente, a refletir no sentido de se observar, não só a reflexão que é crítica, analítica, de exame, mas também outra que é	Afirma que é necessário, ao pesquisador, observar seu próprio fazer, pois, caso isso não aconteça, você deixa de notar os elementos envolvidos, as operações e deslocamentos de campos cognitivos que são realizadas. Aponta que, quando uma analogia é feita, você passa a refletir, a se observar, com uma reflexão que não é analítica e sim de reconstrução que busca entender que transportes, que associações foram feitas para se descobrir algo. Diz que há certas analogias de teor técnico em que esse teor retroage sobre as imagens de modo que se possam fazer associações imaginativas retornar aos aspectos

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	mais passiva, contemplativa, de reconstituir de memória, sem fazer análise exatamente. É como você tentar lembrar o que você fez num dia, ou num período do dia. Há a observação, há a análise, a identificação de atributos, mas antes de qualquer coisa que transportes, que associações foram feitas de um campo para outro para eu descobrir alguma coisa? Em certos casos, em certas analogias, certos transportes que têm teor técnico, esse teor técnico retroage sobre as imagens, quer dizer eu posso ficar mais livre na associação imaginativa, posso retornar para quais aspectos podem ser transferidos tecnicamente porque essa rede de transporte, de idas e vindas já foi percorrida várias vezes, então eu posso me liberar um pouco mais para ir pensando figuradamente, imaginativamente, de modo, às vezes, até um pouco difuso porque são figuras meio abstratas, são disposições de relações espaciais ...de conceitos, mas elas se dispõem no espaço.	que podem ser transferidos tecnicamente, porque há um domínio, por parte do matemático, da técnica e dos conceitos que podem ser utilizados. Afirma que o ir e vir pelo caminho, várias vezes, libera o matemático para um pensar mais figurado e imaginativo mesmo que pareça difuso por se tratar de figuras abstratas ou conceitos.
E4.15	Quer dizer, os conceitos, mesmo do ponto de vista lógico, ao apresentarem subordinações, interdependências hierárquicas, dentro da lógica, ela se configura espacialmente também, num sentido abstrato e que às vezes se reconstroem no sentido geométrico. E algumas vezes eu consegui, como no caso do teorema fundamental da álgebra, uma geometrização de uma demonstração onde a geometria se apresentava como direção a ser seguida, como percurso para mobilizar os elementos algébricos que se configuravam em torno desse percurso sugerido geometricamente. Ou seja, é, nesse sentido, uma demonstração geométrica. Puramente geométrica	Afirma que os conceitos, mesmo que do ponto de vista lógico apresentem subordinações e interdependências hierárquicas e se configurem espacialmente num sentido abstrato, podem se reconstruir num sentido geométrico. Afirma ter conseguido, para o Teorema Fundamental da Álgebra, uma demonstração em que a geometria se mostra como direção a ser seguida, como percurso que mobiliza elementos algébricos que se configuram em torno do percurso sugerido geometricamente. Diz que o elemento geométrico subjacente à demonstração dada existia permeando a situação e foi evidenciado como seu estruturador. Isso, afirma, implicou em

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	não faria nenhum sentido porque o teorema é sobre álgebra. Puramente geométrica significaria sem nenhum elemento algébrico, porque o teorema é sobre uma estrutura algébrica. Mas, por que o elemento geométrico subjacente, já existente ali, permeando a situação, uma vez que ele foi evidenciado como estruturador condicionante da situação, pôde ser traduzido numa demonstração formal com conteúdo geométrico? Isso só para dar um exemplo que ali houve muitos deslocamentos de campo cognitivo tudo assim, praticamente, instantâneo, tanto mais instantâneo, para a aparência da percepção e da auto-percepção, como se fosse instantânea, talvez porque as trilhas já tinham sido percorridas muitas vezes então o transporte se aparenta instantâneo	deslocamentos de campo cognitivo de modo praticamente instantâneo devido às idas e vindas já percorridas tantas vezes.
E4.16	Quando você tenta fazer argumentações que pareceriam que ia fluir de acordo com a expectativa e começa a enroscar /.../ buscamos ver o que é que está acontecendo. Primeiro o que está acontecendo tecnicamente. Na primeira camada, onde é que está "dando pane"? É uma falha de modo de combinar, as coisas usualmente combináveis que se esperaria que dessem aquele resultado que a gente está visando, ou está tendo um misto de problema técnico com cognitivo? Eu tenho um exemplo, que foi o de converter inversões rotatórias e reflexões rotatórias na geometria espacial, nas isometrias do espaço. Eu precisei de novo ficar desenhando planos para ver onde é que estava falhando o argumento que se esperaria que saísse fluentemente. /.../ É uma álgebra, mas aí é um desenhinho,	Afirma que, em ocasiões em que se deseja fazer argumentações que, inicialmente, pareciam ser fluentes e elas não acontecem, o matemático pára e investiga a falha: primeiramente, no campo técnico e, em seguida, no encadeamento do que foi combinado para se obter o resultado procurado. Para ilustrar, dá um exemplo utilizando simetria em que afirma ter retornado ao desenho de planos para ver onde o argumento estava falhando. Mostra que sentiu necessidade de desmembrar tanto as contas (operações algébricas) quanto os desenhos a fim de perceber a falha que estava ocorrendo nas combinações. Percebe que o erro estava na ordem dos planos considerados, tomados, tanto nas contas como na imaginação, em

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	né? Álgebra topológica. /.../ Eu fiz contas, mas num primeiro momento elas precisavam de bastante atenção para firmar a correspondência das contas e as configurações geométricas, para ver detalhadamente se corresponde cada coisa aos seus aspectos algébricos, combinatório, sintático, se representam bem aquilo que se visa geometricamente. Então, a partir de um certo ponto, quando você faz uma conta você já se refere ao objeto visado e, muitas vezes, uma certa continha, por exemplo, uma comutação de duas transformações já tem a ver com o fato de um plano ser ortogonal a uma reta, é por isso que elas comutam. Comecei a fazer a conta aqui e não achei. /.../ E o problema era o que? Com a conta? Com a disposição dos planos? Então tinha que rever e voltar ao início e não usar fatos, digamos, já acumulados nas correspondências e jogar em projetos. Tive que desmembrar tanto as contas quanto os desenhos e no final eu acabei constatando que o plano que eu estava pegando numa certa ordem é que estava errado. Porque dependendo da ordem dos planos, das reflexões que se faziam nos quatro planos que apareciam, não funcionaria mesmo e reincidentemente eu estava trocando como se troca direita por esquerda. Na conta e na imaginação de qual deveria entrar em primeiro, segundo ou em terceiro lugar. No final era uma coisa simples, mas tem hora que enrosca mesmo, quer dizer, vale a pena? Eu acho que sempre vale a pena porque /.../ mesmo que se constate que a confusão era uma coisa boba, isso serve para se identificar onde é que se cometem esses deslizes de conexão de um campo para outro.	ordem distinta da que se deveria. O sujeito enfatiza que a falha leva o matemático à análise do caminho percorrido.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
E4.17	Então ... por que é que falhou a fluência? /.../ Às vezes é uma falha interna de um campo cognitivo, mas aqui, no caso, era tomar uma coisa por outra como a gente toma direita por esquerda. Em muitas situações corriqueiras dentro da matemática, em campos técnicos, se toma uma coisa por outra. Qual coisa eu tomei por outra? Mas quando as coisas têm assim muitas operações envolvidas, e muitas delas funcionam de modo eficiente, até automaticamente, você vai consertando e mandando para frente. Mas quando alguma coisa não funciona tem que se saber onde não funciona. E, normalmente, é uma coisa "besta", conforme se costuma dizer. Mas aí é que está, não é uma questão do objeto em si, mas do processo de entendimento, quer dizer que conexão, que ligação, que associação, que eu fiz que dispõe as coisas de uma maneira como se fosse uma porca entrando enviesada no parafuso e espanando a rosca? Sem querer, na rapidez das ligações, alguma coisa entrou no lugar de outra sem que fosse voluntário.	Afirma que é comum, em situações corriqueiras da matemática, ocorrerem falhas na fluência técnica por estar sendo tomada uma coisa por outra. Diz que esse tipo de falha não é do objeto em si, mas do processo de entendimento que exige uma busca das conexões e ligações feitas que não permitem a obtenção do resultado esperado. Afirma que esses equívocos são involuntários e decorrentes da rapidez das ligações.

4.1.5.Entrevista 5 – Docente do Departamento de Matemática UNESP/SP – entrevista realizada em 14 de fevereiro de 2006

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
E5.1	Eu acho que a utilização de figuras e diagramas é muitíssimo importante. No ensino porque é um ponto de apoio para o raciocínio, mas não é só para o ensino. O matemático profissional, quando está trabalhando profissionalmente, ele faz as suas "figurinhas". Mesmo que ele não desenhe, vamos dizer, ele tem, mentalmente, as "figurinhas". É interessante você presenciar uma conversa entre matemáticos de altíssimo nível, um deles diz assim "não, mas esse rabinho da função, mas essa linhazinha aqui". Tudo isso, na verdade, é a imagem mental ou a imagem que se desenhou, ou seja, um diagrama. Isso é importante na descoberta matemática também, porque, como eu disse, o diagrama é sempre um auxílio. Evidentemente, eu não vou dizer que aquilo que eu estou desenhando é, de fato, um objeto matemático, mas é certamente um suporte, um modelo dos objetos matemáticos que eu tenho na minha mente e estou tentando explorar.	Afirma que, no ensino, as figuras e diagramas são muito importantes como ponto de apoio para o raciocínio. O matemático profissional faz figuras mesmo que não as desenhe; ele as tem mentalmente. Afirma que, ao presenciar a conversa entre matemáticos profissionais ouvimos expressões, usadas por eles, ao se referirem a assuntos matemáticos, que indicam a presença de uma imagem mental ou uma imagem desenhada, um diagrama (tal como falar do "rabinho da função"). Ressalta que o diagrama também é importante na descoberta matemática, pois é um auxílio. Afirma que, embora o que é desenhado não seja o objeto matemático, ele é um suporte, um modelo de objetos matemáticos que o matemático tem em mente e tenta explorar.
E5.2	[Esse suporte] é para dar as idéias, para fixar os conceitos e mais, também para auxiliar na demonstração porque, muitas vezes, você olhando um diagramazinho vê um caminho a ser percorrido para obter a demonstração que você quer. Eu acho que um exemplo marcante dessa parte, vamos chamar de heurística, é o tratado do Arquimedes, *O Método*, que é uma carta que ele escreve para um discípulo falando como é que ele faz a descoberta das proposições matemática e utiliza tudo quanto é possível ser utilizado: balança,	O sujeito afirma que, o suporte do diagrama, mostra um caminho para a demonstração. Indica que, muitas vezes, o matemático, ao olhar para um diagrama vê um caminho para a demonstração que pretende fazer. Cita o exemplo de Arquimedes em *O Método*, afirmando que as partes heurísticas, ou a utilização de diagramas e objetos, auxiliam a descoberta de proposições. Depois de obtido o resultado, esquece-se o apoio e volta-se para os métodos da geometria preconizados por Euclides. Para o sujeito, esse é o processo utilizado pelo matemático

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	alavanca, o que, de algum modo, representa também um diagrama, está fazendo um papel de diagrama e depois de obtido o resultado, evidentemente, ele diz: bom isso tudo é esquecido e agora eu vou trabalhar segundo os métodos da geometria, preconizados por Euclides e é o que faz o matemático profissional.	profissional.
E5.3	Evidentemente na publicação ele não irá falar do rabinho da função, ele vai dizer as coisas do ponto de vista matemático. Mas isso tudo serviu de suporte, serviu de apoio para que ele chegasse à conclusão que chegou. Então eu acho que, certamente, os diagramas, as figuras são muito importantes e todos os matemáticos profissionais sabem disso.	Afirma que, embora o apoio dos diagramas e das imagens seja muito importante para que o matemático chegue às conclusões, suas publicações não revelam tudo isso, pois utilizam a linguagem formal da matemática. Enfatiza que a importância dos diagramas é conhecida por todos os matemáticos.
E5.4	com relação ao ensino é muito importante porque dá também um suporte para o aluno saber daquilo que o professor está falando, para que o aluno imagine os conceitos matemáticos, as idéias	Afirma que os diagramas, no ensino, são importantes para que o aluno saiba do que o professor está falando e imagine os conceitos matemáticos e as idéias.
E5.5	quando você trabalha no R^n, vamos dizer, ele é simplesmente uma generalização do R, não é? E você tem esses diagramas no R e trata de imaginá-los no R^n, trata de estender os resultados que você tem na reta para os resultados do R^n. Então o diagrama sempre é usado, por mais abstrata que seja a teoria, por menos que você consiga ver, o que se faz é sempre estudar casos particulares em que essas coisas podem ser visualizadas e depois procurar estendê-las para os resultados, aí sim só do ponto de	Afirma que o diagrama é sempre importante e usado mesmo em situações mais abstratas. Ao se trabalhar, por exemplo no R^n, busca-se estudar casos particulares em que a visualização seja possível (em R, por exemplo) e estender os resultados do ponto de vista matemático. Afirma que os diagramas são sempre importantes.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	vista matemático. Diagramas, eu acho, é sempre importante.	
E5.6	Nas demonstrações de Euclides, por exemplo, há seis partes. Toda proposição que se preze, nos Elementos de Euclides tem seis partes. A primeira parte que se chama em grego *protesis* é o enunciado da proposição. Depois nas duas partes seguintes ele vai decompor o enunciado nas *coisas dadas* (que se chama *ektesis)* e nas *coisas que devem ser achadas*, no que se tem e depois no que se quer, que se chama *diorismos*, essa terceira parte. A quarta parte, que é a parte central do teorema, que se chama em grego *kataskeuê,* é uma construção. Na quinta parte ele mostra que a construção de fato surte o efeito, ou seja, demonstra aquilo que você quer, essa quinta parte se chama *apodeixis*, e finalmente a última parte, *sumperasma,* retorna o enunciado e diz: portanto foi provado que etc. e re-enuncia a proposição. Então na parte da construção, por todo o livro, o único tempo verbal que é usado, e nós não temos em português, é o imperativo perfeito passivo. Imperativo porque ele dá ordens, ligar dois pontos, traçar uma paralela a uma reta dada, dá ordens. O passivo, na minha concepção, é porque os objetos matemáticos é	Afirma que as demonstrações de Euclides se constituem de seis partes. A primeira *protesis* é o enunciado. A segunda, *ektesis*, é onde ele destaca as coisas dadas. A terceira, *diorismos*, expressa o que deve ser determinado, a quarta parte, *kataskeuê*, é a parte central da demonstração e é uma construção, a quinta parte *apodeixis* mostra que a construção teve o efeito esperado e a sexta parte, *sumperasma,* retoma o enunciado. O sujeito afirma que, na quarta parte da demonstração, o tempo verbal empregado, em todo o livro, é o imperativo perfeito passivo. O imperativo é pela ordem dada. Por exemplo, ligar dois pontos. O passivo é recebido pelos objetos matemáticos que sofrem a ação, por exemplo, o fato de serem os dois pontos ligados, e o perfeito, em grego, significa que a ação foi concluída e que se tem o resultado. Mas, ressalta, o resultado é a figura. Sendo assim, afirma, quando começa a parte do teorema a figura já foi construída. A demonstração é feita após a construção da figura. Ela é à base da demonstração.

Unidades de Significado	Linguagem do Sujeito	Asserções articuladas
	que estão sofrendo ação, comandada por ele, o fato de ser os dois pontos ligados, o fato de ser traçada a reta paralela, então os objetos matemáticos estão sofrendo a ação. E por que o perfeito? O perfeito em grego significa que a ação foi concluída e que se tem um resultado. E qual é o resultado da construção? É a figura. Então quando começa a parte do teorema a figura foi construída e ele começa a trabalhar com a figura para a quinta parte, *apodeixis*, para demonstrar que de fato o resultado é válido. Então a figura é parte integrante da demonstração e é uma parte central da demonstração. Porque é a quinta parte, vamos dizer, a demonstração propriamente dita, a *apodeixis*, que em grego significa demonstração, é feita depois da construção e baseada na construção. Ela é a base.	

4.2. Caminhando rumo ao sentido do que está sendo investigado

No movimento de análise dos dados, ao elaborar o quadro (1) com as unidades de significado, fomos percebendo que havia discursos que nos apontavam para uma mesma idéia. Outros discursos nos permitiam interpretações múltiplas. Procuramos, então, elaborar um novo quadro que nos permitisse identificar as convergências das Unidades de Significado e expressar as intersecções percebidas entre as diferentes falas dos sujeitos.

4.2.1. Quadro 2: sua organização

Para a construção desse novo quadro, usamos, na coluna central da tabela, parte das falas dos sujeitos. Na primeira coluna, identificamos quais os sujeitos que fizeram tais afirmações e em qual Unidade de Significado estamos destacando-a. Como não usamos toda a Unidade de Significado, mas sim parte dela que diz de uma mesma idéia, há Unidades que têm mais linhas e outras menos, em decorrência do que foi compreendido em cada uma delas. Na terceira coluna, colocamos um índice (código de referência, símbolo) com a intenção de identificar as convergências nas falas dos sujeitos. Ou seja, falas que contêm o mesmo símbolo foram interpretadas como relacionadas com uma mesma idéia. Consideramos que esse foi um passo importante na busca de convergência das Unidades de Significado.

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
E1.1.1	o aspecto dedutivo da geometria, vista como ciência, é muito forte e é dada ênfase ao formalismo	*
E1.1.2.	a indução é importante no ensino de geometria	
E1.1.3	Há um alerta de que não se pode usar a figura na demonstração	*
E1 2.1.	No ensino o aluno deveria poder conjecturar resultados ao invés de só provar teoremas	
E1 2.2.	Na matemática profissional, a prova é conseqüência de resultados especulados e testados por outros recursos	@ e ☼
E1 2.3	O aspecto indutivo, no ensino, é pouco explorado	
E1. 3.1	É importante que o aluno construa figuras usando régua e compasso, ou softwares geométricos, para conjecturar resultados.	
E1 3.2.	Na construção da figura, o aspecto visual assume uma posição relevante	Φ
E1 4.1	Os diagramas são fundamentais na produção do conhecimento matemático para a compreensão dos resultados geométricos.	@
E1 5.1.	Uma teoria da geometria diferencial foi investigada com a visualização possibilitada pelo computador.	☺
E1 5.2.	A visualização da figura, gerada no computador, permitiu ao matemático construir uma demonstração algébrica.	@ e ☺
E1 6.1	A atitude de investigar a figura é a de um matemático profissional. Ele usa a figura como caminho para articular o conhecimento matemático e conseguir fazer a prova matematicamente válida.	@
E1 7.1	Num curso de álgebra, sobre teoria dos grupos, fica surpreso quando o professor começa a desenhar quadrados na lousa para mostrar os grupos de simetrias.	☺ e ♪
E1 7.2	Mesmo na álgebra, o recurso da geometria é muito esclarecedor	☺
E1 8.1	O autor do livro constrói as figuras com régua e compasso pois considera que elas são inerentes ao entendimento da demonstração	@
E1 8.2	As figuras não são parte da demonstração	*
E2 1.1.	Os diagramas fazem parte de sua vida.	

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
E2 1.2.	Ao pensar em exemplos, busca situações mais simples em que possa fazer um desenho para ter a percepção do que está acontecendo.	
E2 2.1.	Os diagramas, as figuras e os gráficos são de grande importância nas aulas de cálculo, álgebra linear e, especialmente, na geometria.	∇
E2 3.1	Os diagramas são um recurso bastante usado nas suas pesquisas	►
E2 4.1	No ensino de cálculo, usa o computador para trabalhar a visualização na construção de gráficos e na parametrização das curvas.	☼
E2 4.2.	A visualização favorecida pelo computador é bastante utilizada nos teoremas do cálculo	♣
E2 5.1	A construção da figura ou do gráfico no computador deve ser seguida por uma interpretação do aluno para que ela faça sentido	∇
E2 5.2	O aluno não pode apenas enxergar a figura ela tem que fazer sentido	∇
E2 5.3	O computador permite diferentes perspectivas (modos de ver) e faz o aluno pensar em exemplos simples	O
E2. 6.1	Nos cursos de desenho geométrico e geometria plana, o recurso visual é importante.	Φ
E2 7.1	É necessária uma combinação de linguagens – visual, computacional, pictórica, escrita – para a produção de conhecimento.	♪ e ☺
E2 7.2	A figura pode admitir interpretações distintas para os diferentes sujeitos	♣
E2 7.3	É preciso um compromisso do aluno com a explicação do que foi visto e, para isso, ele precisa escrever. (via linguagem não pictórica ou visual)	∗ e ♣
E2 7.4	No processo de ensino e na produção do conhecimento, não se pode parar na visualização.	∗
E2 8.1	A exploração visual concretiza o resultado e favorece uma base para a justificação	∇
E2 8.2.	A visualização é um estímulo, mas é necessário justificar os procedimentos como uma conclusão das atividades.	∗
E2 8.3	Seguindo-se à exploração dinâmica no computador, é necessário que haja uma conclusão das atividades, que pode ser uma prova ou uma construção com régua e	∗

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
	compasso.	
E2 9.1	As figuras e os desenhos dizem mais que mil palavras, mas não podem ser conclusões	∗ e O
E2 9.2	Dado o aspecto enganoso da figura, é necessário que o aluno encontre outro recurso, além da figura, para expor o que está querendo dizer.	∗ e ♣
E2 10.1	As figuras desencadeiam o processo de investigação e é importante no ensino.	
E2 10.2	A figura pode servir de apoio para a investigação das situações matemáticas pelo aluno e isso é o que se busca em sala de aula.	e @
E2 11.1	Em sua pesquisa com cones, busca exemplos em dimensões mais baixas para enxergar o que está acontecendo. Isso favorece a ampliação da teoria	@
E2 11.2	As figuras são auxiliares para o pesquisador ter idéias e interpretar o que acontece	♣
E2 11.3	Incentiva os alunos, também, a buscarem exemplos simples para terem segurança do que está acontecendo e analisar as possíveis extensões.	O
E2 11.4	As figuras auxiliam tanto no que diz respeito a segurança na investigação quanto na sua análise.	O e ∇
E3. 1.1.	Não consegue imaginar nada sem figuras, sem uma imagem	Φ
E3 1.2	Mesmo que não se trate de geometria, deve haver uma imagem	☺
E3 1.3	Um gráfico ajuda a entender idéias.	♣ e ►
E3 2.1	Antes de fazer uma construção, montamos um esquema – esboço da situação – seja ele desenhado no papel ou imaginado.	Φ e O
E3 2.2	É impossível fazer construções sem antes imaginá-las (fazer um esboço)	Φ e ♣
E3 3.1	Os computadores favorecem a construção de figuras com maior precisão para não sermos enganados por elas.	♣e @
E3 4.1	Para fazer uma demonstração, pensa, faz uma figura, retira dela as informações e sistematiza.	♣ e ☼
E3 4.2	A formalização é importante porque o que se vê pode estar errado	∗

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
E3 5.1	A escrita final da produção, em topologia, não revela o processo de construção.	♠
E3 5.2	Os cálculos, tabelas, desenhos são importantes na produção de um artigo em topologia e são guardados porque tem grande importância e não aparecem na escrita final	♠ e ♣
E3 5.3.	Não é possível produzir topologia sem os esquemas e eles são importantes para comunicar os resultados obtidos.	♣
E3 6.1.	Em tudo, os esquemas são importantes, inclusive na comunicação de um assunto teórico.	♣
E3 7.1	Não é possível pensar em geometria sem figuras.	☼
E3 7.2	A figura não serve como demonstração.	⁎
E3 7.3	A figura mostra de onde a idéia surgiu.	♠ e ►
E3 8.1	Historicamente, o processo de construção do conhecimento matemático passa por figuras, tem uma parte concreta que antecede a formalização.	@
E3 8.2	No ensino, é importante considerar o visual para desenvolver o raciocínio que leva a generalização.	@
E3 9.1	O matemático profissional não abandona a figura. Ele utiliza a figura para chegar no seu objetivo	@ e ∇
E3 9.2	Por mais abstrata que seja a teoria, o matemático busca exemplos simples que lhe permita ver	@ e ☼
E3 9.3	Mesmo na geometria, quando a teoria é mais abstrata buscam-se exemplos simples para depois verificas casos mais gerais.	O e @
E3 9.4	As idéias são buscadas no início. São feitos vários casos particulares para se perceber que vale o geral.	O e @
E3 10.1	A figura, mesmo quando não construída no papel, é imaginada	►
E3 10.2	No ensino, o uso da figura é fundamental pois, em geometria, não tem como se prescindir dela.	O e ∇
E3 10.3	No ensino, há um momento em que é necessário se afastar dos modelos concretos, das figuras desenhadas no papel mas elas sempre permanecem em nossa imaginação.	⁎ e @
E4 1.1.	As figuras, no ensino, permitem perceber as articulações de elementos que podem servir para melhorar o entendimento de situações	☼

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
E4 2.1	As figuras não são triviais já que têm elementos em sua composição que merecem atenção.	@ e ►
E4 3.1	Se não nos ativermos às evidências geométricas, perdemos a oportunidade de re-qualificação do que vem a seguir	@
E4 3.2	As operações geométricas, como por exemplos as translações, fazem uma mediação bastante fértil entre o campo numérico e geométrico	☼
E4 3.3.	Reduzir, precocemente, as relações geométricas a números leva a uma perda da riqueza da própria geometria pois se muda o campo cognitivo e nos afastamos do desenvolvimento de um campo que é propriamente geométrico	☼ e ♪
E4 4.1	A redução de tudo a números leva, inclusive o matemático, a uma redução do campo de percepção geométrica	♪
E4 4.2	A capacidade geométrica, por ceder lugar ao campo analítico, geométrico, acaba atrofiada.	♪
E4 5.1	O modo de tratar com os objetos matemático, em perspectivas distintas, leva a um ganho da inteligibilidade e do próprio aspecto matemático que se enriquece dada às opções de entendimento	☼
E4 5.2	A diversidade de entendimento ativa a imaginação e ampara o sujeito tecnicamente	☼ e @
E4 5.3	A conexão entre o campo técnico e cognitivo (momento vivo da apreensão) leva a um conhecimento da origem das formulações técnicas	☼; @ e ►
E4 5.4	Conhecer a origem das formulações técnicas permite ao sujeito fazer a compreender a relação entre a apreensão e a técnica	∇ e ♠
E4 6.1	O arranjo teórico que está presente em axiomas e pressupostos, utilizados na tarefa matemática, não é muito claro para o aluno.	♠ e ♪
E4 6.2	No ensino, o que é considerado evidente é desprezado e isso leva a um empobrecimento da compreensão.	
E4 6.3	Falta uma discussão mais livre (da teoria) que leve a uma riqueza de compreensão, inclusive técnica.	☺
E4 7.1	Sente-se surpreso ao estudar álgebra linear pois nunca havia visto uma geometria apresentada a partir das relações geométricas.	☼

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
E4 7.2	A apresentação da geometria a partir das relações fez com que ela se reconstruísse dentro do cenário algébrico.	☼
E4 7.3	A apresentação da geometria somente a partir de figuras, sem as propriedades, não permite perceber, de modo claro, a estrutura lógica do objeto matemático estudado	∗
E4 8.1	As figuras não podem ser usadas como demonstração	∗
E4 8.2	As figuras, mesmo em situações abstratas, favorecem a compreensão e possibilitam conexões entre campos cognitivos distintos.	☼
E4 9.1	Se nos apoiamos em enunciados muito simplificados, que consideram como base a figura, não podemos distinguir a lógica da própria figura	∗
E4 9.2	Ao se tomar os problemas com base apenas na figura, não se tem meios de conferir o que deve ser reconstruído logicamente	∗
E4 9.3	A figura deve ser tomada de modo que se possa distinguir o que é do campo da apreensão imediata e o que é reconstrução racional.	∗
E4 10.1	Nada pode ser desmerecido mas também não se deve reduzir uma coisa á outra.	∗
E4 10.2	A figura é usada para entendimento e motivação da construção formal mas é necessário passar do campo perceptivo ao demonstrativo.	∗
E4 11.1	Podemos compartilhar experimentos, constatações e submetê-los a exame de validade.	∗
E4 12.1	Pode-se dominar uma estrutura matemática e ser-se insensível a aspectos presentes em sua formulação	♠ e ☺
E4 12.2	A figura não deve ser tomada como sem importância porque ela pode estar na base constitutiva da formulação matemática	♠
E4 12.3	A questão técnica pode ser necessária devido a restrições de âmbito mas é preciso ver que há outras formulações que tem uma riqueza de significados igual.	♠
E4 13.1	O domínio técnico e lógico é necessário às pesquisas mas o contentamento com isso pode cegar o pesquisador para sua própria cognição.	∗ e ☼
E4 13.2	O sucesso alcançado com a técnica pode impedir o pesquisador de refletir de modo atento e cuidadoso sobre seu próprio fazer	☼ e ♪

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
E4 13.3	A reflexão sobre o seu próprio fazer não é racional mas é uma auto observação.	
E4 14.1	Ao fazer uma analogia o matemático passa a reconstruir buscando entender os transportes que foram feitos para descobrir algo.	♣ e ☺
E4 14.2	As analogias, para serem compreendidas, obrigam o matemático a retroceder às imagens, as associações imaginativas que lhe façam entender o teor técnico.	☺ e ♠
E4 14.3	O ir e vir pelo caminho da técnica libera o matemático para um raciocínio mais figurado e imaginativo mesmo em situações abstratas.	e ►
E4 15.1	Os conceitos por mais abstratos que possam ser, podem ser reconstruídos num sentido geométrico.	@
E4 15.2	O sujeito demonstra ter conseguido uma demonstração para um teorema da álgebra em que a geometria se mostra como caminho a ser seguido.	♣
E4 15.3	O elemento geométrico era subjacente à demonstração e aparece como seu estruturador.	☼ e @
E4 16.1	Na falta de uma fluência esperada o matemático pára e analisa considerando, primeiro, o campo técnico e, em seguida, o encadeamento do que foi combinado.	☺ e ☼
E4 16.2	O sujeito, para entender a falha numa demonstração sua, teve necessidade de desmembrar as contas (álgebra) e o desenho.	∇
E4 16.3	A falha numa demonstração leva o matemático à análise do caminho percorrido.	► e ♠ e ☼
E4 17.1	A falha nas demonstrações matemáticas, normalmente, acontecem devido ao entendimento que exige uma busca das conexões feitas.	♪ e ☺
E5 1.1	No ensino, as figuras e diagramas são muito importantes como ponto de apoio ao raciocínio	♣ e
E5 1.2	O matemático profissional recorre às figuras. Mesmo que não as desenhe ele as tem na imaginação.	O e ►
E5 2.1	A conversa entre matemáticos denuncia a presença de imagens, mesmo que mentais, usadas por eles.	►
E5 2.2.	O diagrama é importante na descoberta matemática porque é um auxílio	@ e ∇

Localização	Unidades de Significado (buscando convergências)	Índice
E5 2.3	O que é desenhado não é o objeto matemático. Ele é um suporte, um modelo de objetos matemáticos que o matemático tem em mente e tenta explorar.	*
E5 3.1	O suporte do diagrama mostra um caminho para a demonstração.	O
E5 3.2	Ao olhar para um diagrama, muitas vezes, o matemático vê um caminho para a demonstração que pretende fazer.	O e
E5 3.3	As partes heurísticas ou a utilização de diagramas e objetos auxiliam a descoberta de proposições.	e @
E5 3.4	Obtido o resultado desejado, o matemático abandona o apoio de objetos e figuras e volta-se para os métodos da geometria preconizados por Euclides	*
E5 4.1	As publicações matemáticas não revelam a presença (ou a importância) que os diagramas e as figuras tiveram para que o profissional chegasse às conclusões. As publicações utilizam a linguagem formal	♠
E5 5.1	No ensino, os diagramas são importantes para que o aluno saiba do que o professor está falando e imagine os conceitos matemáticos e as idéias.	♣
E5 6.1	O diagrama é importante e usado mesmo em situações mais abstratas pois se buscam casos particulares em que a visualização seja possível e estendem-se os resultados do ponto de vista matemático	@ e ☼
E5 7.1	Nas demonstrações de Euclides, o diagrama é importante porque ele é o resultado, a base da construção da demonstração.	♣

4.2.2. Primeiras convergências das Unidades de Significado

Trazemos, aqui, uma síntese das idéias articuladas e identificadas, no quadro (2), pelos códigos abaixo.

∗ **Na geometria, o método dedutivo é bastante valorizado e é dada importância à linguagem formal das demonstrações.**

Tanto no ensino quanto na produção do conhecimento matemático, há uma importância do aspecto indutivo, das explorações e das conjecturas.

@ *As figuras são instrumentos de análise de hipóteses e resultados com vistas à generalização.*

Φ As figuras (esboços) são recursos importantes para a construção de imagens do objeto matemático.

♠ *A expressão final da produção matemática não revela o modo de o matemático pensar.*

O A figura, o recurso visual, favorece a compreensão de situações matemáticas e indica (abre) um caminho para a prova.

♣ *A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático.*

∇ As figuras são importantes na leitura de situações matemáticas para que elas façam sentido.

► as figuras são elementos de investigação importantes ao pensara matemático, mesmo quando elas não são explicitadas ou desenhadas no papel.

☼ as figuras favorecem conexÕes entre modos distintos de percepÇão das situaÇões matemáticas

♪ Há percepções distintas e não é possível reduzir tudo a uma única forma de investigação e expressão

☺ **A exploração de recursos distintos é importante para que o objeto matemático se mostre e seja compreendido.**

4.2.3. Quadro 3: agrupando as Unidades de Significado

Valendo-nos dos símbolos usados no quadro (2), construímos essa nova tabela, agrupando apenas as asserções que convergem para uma mesma idéia, com o objetivo de facilitar a visualização do que foi compreendido e interpretado a partir das Unidades de Significado. Entre as tabelas, indicamos as interseções que nos permitem ver uma Unidade de Significado como pertencente a mais de uma idéia.

$*$ **Na geometria, o método dedutivo é bastante valorizado e é dada importância à linguagem formal das demonstrações.**

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E1.1.1	O aspecto dedutivo da geometria, vista como ciência é muito forte e é dada ênfase ao formalismo	$*$
E1.1.3	Há um alerta de que não se pode usar a figura na demonstração	$*$
E1 8.2	As figuras não são parte da demonstração	$*$
E2 7.4	No processo de ensino, e na produção do conhecimento, não se pode parar na visualização.	$*$
E2 8.2.	A visualização é um estímulo, mas é necessário justificar os procedimentos como uma conclusão das atividades.	$*$
E2 8.3	Seguindo-se à exploração dinâmica no computador, é necessário que haja uma conclusão das atividades que pode ser uma prova ou uma construção com régua e compasso.	$*$
E3 4.2	A formalização é importante porque o que se vê pode estar errado	$*$
E3 7.2	A figura não serve como demonstração.	$*$
E4 7.3	A apresentação da geometria somente a partir de figuras, sem as propriedades, não permite perceber, de modo claro, a estrutura lógica do objeto matemático estudado	$*$
E4 8.1	As figuras não podem ser usadas como demonstração	$*$

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E4 9.1	Se nos apoiamos em enunciados muito simplificados, que consideram como base a figura, não podemos distinguir a lógica da própria figura	∗
E4 9.2	Ao se tomar os problemas com base apenas na figura, não se tem meios de conferir o que deve ser reconstruído logicamente	∗
E4 9.3	A figura deve ser tomada de modo que se possa distinguir o que é do campo da apreensão imediata e o que é reconstrução racional.	∗
E4 10.1	Nada pode ser desmerecido mas também não se deve reduzir uma coisa á outra.	∗
E4 10.2	A figura é usada para entendimento e motivação da construção formal mas é necessário passar do campo perceptivo ao demonstrativo.	∗
E4 11.1	Podemos compartilhar experimentos, constatações e submetê-los a exame de validade.	∗
E5 2.3	O que é desenhado não é o objeto matemático. Ele é um suporte, um modelo de objetos matemáticos que o matemático tem em mente e tenta explorar.	∗
E5 3.4	Obtido o resultado desejado, o matemático abandona o apoio de objetos e figuras e volta-se para os métodos da geometria preconizados por Euclides	∗

Intersecções possíveis com: A linguagem forma é importante mas os diagramas são recursos que favorecem a compreensão, possibilitam modos distintos de percepção e são meios intermediários à expressão.

E2 7.3	É preciso um compromisso do aluno com a explicação do que foi visto e, para isso, ele precisa escrever. (via linguagem não pictórica ou visual)	∗ e ♣
E2 9.1	As figuras e os desenhos dizem mais que mil palavras, mas não podem ser conclusões	∗ e O
E2 9.2	Dado o aspecto enganoso da figura, é necessário que o aluno encontre outro recurso, além da figura, para expor o que está querendo dizer.	∗ e ♣
E4 13.1	O domínio técnico e lógico é necessário às pesquisas, mas o contentamento com isso pode cegar o pesquisador para sua própria cognição.	∗ e ☼

Tanto no ensino quanto na produção do conhecimento matemático, há uma importância do aspecto indutivo, das explorações e das conjecturas.

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E1.1.2.	a indução é importante no ensino de geometria	
E1 2.1.	No ensino, o aluno deveria poder conjecturar resultados ao invés de só provar teoremas	
E1 2.3	O aspecto indutivo, no ensino, é pouco explorado	
E1. 3.1	É importante que o aluno construa figuras usando régua e compasso, ou softwares geométricos, para conjecturar resultados.	
E2 1.2.	Ao pensar em exemplos, busca situações mais simples em que possa fazer um desenho para ter a percepção do que está acontecendo.	
E2 10.1	As figuras desencadeiam o processo de investigação e é importante no ensino.	
E4 6.2	No ensino, o que é considerado evidente é desprezado e isso leva a um empobrecimento da compreensão.	
E4 13.3	A reflexão sobre o seu próprio fazer não é racional, mas é uma auto observação.	

Intersecções possíveis: O aspecto indutivo e as conjecturas são importantes e os diagramas podem ser instrumentos de análise para a generalização, importantes para a investigação, mesmo que sejam apenas imaginados, e são recursos de expressão.

E2 10.2	A figura pode servir de apoio para a investigação das situações matemáticas pelo aluno e isso é o que se busca em sala de aula.	e @
E4 14.3	O ir e vir pelo caminho da técnica libera o matemático para um raciocínio mais figurado e imaginativo mesmo em situações abstratas.	e ►
E5 3.3	As partes heurísticas ou a utilização de diagramas e objetos auxiliam a descoberta de proposições.	e @
E5 1.1	No ensino, as figuras e diagramas são muito importantes como ponto de apoio ao raciocínio	♣ e

@ *As figuras são instrumentos de análise de hipóteses e resultados com vistas à generalização.*

Localização	**Interpretação das Asserções (buscando convergências)**	**Índice**
E1 4.1	Os diagramas são fundamentais na produção do conhecimento matemático para a compreensão dos resultados geométricos.	@
E1 6.1	A atitude de investigar a figura é a de um matemático profissional. Ele usa a figura como cainho para articular o conhecimento matemático e conseguir fazer a prova, matematicamente válida.	@
E1 8.1	O autor do livro constrói as figuras com régua e compasso pois considera que elas são inerentes ao entendimento da demonstração	@
E2 11.1	Em sua pesquisa com cones, busca exemplos em dimensões mais baixas para enxergar o que está acontecendo. Isso favorece a ampliação da teoria	@
E3 8.1	Historicamente, o processo de construção do conhecimento matemático passa por figuras, tem uma parte concreta que antecede a formalização.	@
E3 8.2	No ensino, é importante considerar o visual para desenvolver o raciocínio que leva a generalização.	@
E4 3.1	Se não nos ativermos às evidências geométricas perdemos a oportunidade de re-qualificação do que vem a seguir	@
E4 15.1	Os conceitos, por mais abstratos que possam ser, podem ser reconstruídos num sentido geométrico.	@

Intersecções possíveis: os diagramas são instrumentos de análise com vistas à generalização e são recursos importantes para possibilitar a relação entre modos distintos de percepção, para favorecer a compreensão matemática e dar sentido à leitura matemática.

E1 2.2.	Na matemática profissional, a prova é conseqüência de resultados especulados e testados por outros recursos	@ e ☼
E1 5.2.	A visualização da figura, gerada no computador, permitiu ao matemático construir uma demonstração algébrica.	@ e ☺
E3 3.1	Os computadores favorecem a construção de figuras com maior precisão para não sermos enganados por elas.	♣e @
E3 9.1	O matemático profissional não abandona a figura. Ele utiliza a figura para chegar no seu objetivo	@ e ∇

E3 9.2	Por mais abstrata que seja a teoria, o matemático busca exemplos simples que lhe permita ver	@ e ☼
E3 9.3	Mesmo na geometria, quando a teoria é mais abstrata buscam-se exemplos simples para depois verificas casos mais gerais.	O e @
E3 9.4	As idéias são buscadas no início. São feitos vários casos particulares para se perceber que vale o geral.	O e @
E3 10.3	No ensino, há um momento em que é necessário se afastar dos modelos concretos, das figuras desenhadas no papel mas elas sempre permanecem em nossa imaginação.	* e @
E4 2.1	As figuras não são triviais, já que têm elementos em sua composição que merecem atenção.	@ e ►
E4 5.2	A diversidade de entendimento ativa a imaginação e ampara o sujeito tecnicamente	☼ e @
E4 5.3	A conexão entre o campo técnico e cognitivo (momento vivo da apreensão) leva a um conhecimento da origem das formulações técnicas	☼; @ e ►
E5 2.2.	O diagrama é importante na descoberta matemática porque é um auxílio	@ e ∇
E4 15.3	O elemento geométrico era subjacente à demonstração e aparece como seu estruturador.	☼ e @
E5 6.1	O diagrama é importante e usado mesmo em situações mais abstratas, pois se buscam casos particulares em que a visualização seja possível e estendem-se os resultados do ponto de vista matemático	@ e ☼

Φ As figuras (esboços) são recursos importantes para a construção de imagens do objeto matemático.

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E1 3.2.	Na construção da figura, o aspecto visual assume uma posição relevante	Φ
E2. 6.1	Nos cursos de desenho geométrico e geometria plana, o recurso visual é importante.	Φ
E3. 1.1.	Não consegue imaginar nada sem figuras, sem uma imagem	Φ

Intersecções possíveis: os diagramas são recursos importantes para a construção da imagem do objeto matemático e são significativos à compreensão de situações matemáticas que exigem provas e como meio intermediário de expressão do compreendido.

E3 2.1	Antes de fazer uma construção, montamos um esquema – esboço da situação – seja ele desenhado no papel ou imaginado.	Φ e O
E3 2.2	É impossível fazer construções sem antes imaginá-las (fazer um esboço)	Φ e ♣

☺ **A exploração de recursos distintos é importante para que o objeto matemático se mostre e seja compreendido**

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E1 5.1.	Uma teoria da geometria diferencial foi investigada com a visualização possibilitada pelo computador.	☺
E1 7.2	Mesmo na álgebra, o recurso da geometria é muito esclarecedor	☺
E3 1.2	Mesmo que não se trate de geometria, deve haver uma imagem	☺
E4 6.3	Falta uma discussão mais livre (da teoria) que leve a uma riqueza de compreensão, inclusive técnica.	☺

Intersecções possíveis: os diagramas são importantes para compreender o objeto matemático, já que ele pode ser percebido de modos distintos, e os diagramas fazem a intermediação entre o que é expresso e o que pode ser compreendido e analisado.

E1 7.1	Num curso de álgebra, sobre teoria dos grupos, fica surpreso quando o professor começa a desenhar quadrados na lousa para mostrar os grupos de simetrias.	☺ e ♪
E2 7.1	É necessária uma combinação de linguagens – visual, computacional, pictórica, escrita – para a produção de conhecimento.	♪ e ☺
E4 12.1	Pode-se dominar uma estrutura matemática e ser-se insensível a aspectos presentes em sua formulação	♠ e ☺
E4 14.1	Ao fazer uma analogia, o matemático passa a reconstruir buscando entender os transportes que foram feitos para descobrir algo.	♣ e ☺
E4 14.2	As analogias, para serem compreendidas, obrigam o matemático a retroceder às imagens, as associações imaginativas que lhe façam entender o teor técnico.	☺ e ♠

E4 16.1	Na falta de uma fluência esperada, o matemático pára e analisa considerando, primeiro, o campo técnico e, em seguida, o encadeamento do que foi combinado.	☺ e ☼
E4 17.1	A falha nas demonstrações matemáticas, normalmente, acontece devido ao entendimento que exige uma busca das conexões feitas.	♪ e ☺

∇ As figuras são importantes na leitura de situações matemáticas para que elas façam sentido.

Localização	**Interpretação das Asserções (buscando convergências)**	**Índice**
E2 2.1	Os diagramas, as figuras e os gráficos são de grande importância nas aulas de cálculo, álgebra linear e, especialmente, na geometria.	∇
E2 5.1	A construção da figura ou do gráfico no computador deve ser seguida por uma interpretação do aluno para que ela faça sentido	∇
E2 5.2	O aluno não pode apenas enxergar a figura; ela tem que fazer sentido	∇
E2 8.1	A exploração visual concretiza o resultado e favorece uma base para a justificação	∇
E4 16.2	O sujeito, para entender a falha numa demonstração sua, teve necessidade de desmembrar as contas (álgebra) e o desenho.	∇

Intersecções possíveis: os diagramas são significativos na leitura de situações matemáticas, favorecendo à compreensão, indicando um caminho para a prova e revelando o pensar matemático que não é expresso na redação final.

E2 11.4	As figuras auxiliam tanto no que diz respeito à segurança na investigação quanto na sua análise.	O e ∇
E3 10.2	No ensino, o uso da figura é fundamental pois, em geometria, não tem como se prescindir dela.	O e ∇
E4 5.4	Conhecer a origem das formulações técnicas permite ao sujeito fazer a compreender a relação entre a apreensão e a técnica	∇ e ♠

► as figuras são elementos de investigação importantes ao pensar matemático, mesmo quando elas não são explicitadas ou desenhadas no papel.

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E2 3.1	Os diagramas são um recurso bastante usado nas suas pesquisas	►
E3 10.1	A figura, mesmo quando não construída no papel, é imaginada	►
E5 2.1	A conversa entre matemáticos denuncia a presença de imagens, mesmo que mentais, usadas por eles.	►

Intersecções possíveis: os diagramas são significativos ao pensar matemático, sejam eles desenhados no papel ou imaginados, pois favorecem a percepção e são elementos de investigação importante.

E3 1.3	Um gráfico ajuda a entender idéias.	♣ e ►
E3 7.3	A figura mostra de onde a idéia surgiu.	♠ e ►
E4 16.3	A falha numa demonstração leva o matemático à análise do caminho percorrido.	► e ♠ e 2
E5 1.2	O matemático profissional recorre às figuras. Mesmo que não as desenhe, ele as tem na imaginação.	O e ►

☼ as figuras favorecem conexões entre modos distintos de percepção das situações matemáticas

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E2 4.1	No ensino de cálculo, usa o computador para trabalhar a visualização na construção de gráficos e na parametrização das curvas.	☼
E3 7.1	Não é possível pensar em geometria sem figuras.	☼

E4 1.1.	As figuras, no ensino, permitem perceber as articulações de elementos que podem servir para melhorar o entendimento de situações	☼
E4 3.2	As operações geométricas, como, por exemplo, as translações, fazem uma mediação bastante fértil entre o campo numérico e geométrico	☼
E4 5.1	O modo de tratar com os objetos matemático, em perspectivas distintas, leva a um ganho da inteligibilidade e do próprio aspecto matemático que se enriquece dada às opções de entendimento	☼
E4 7.1	Sente-se surpreso ao estudar álgebra linear pois nunca havia visto uma geometria apresentada a partir das relações geométricas.	☼
E4 7.2	A apresentação da geometria a partir das relações fez com que ela se reconstruísse dentro do cenário algébrico.	☼
E4 8.2	As figuras, mesmo em situações abstratas, favorecem a compreensão e possibilitam conexões entre campos cognitivos distintos.	☼

Intersecções possíveis: os diagramas são significativos à percepção matemática, pois ela se dá por perspectivas e não se podem reduzir os modos de expressar o compreendido em uma única forma de linguagem.

E3 4.1	Para fazer uma demonstração, o matemático pensa, faz uma figura, retira dela as informações e sistematiza.	♣ e ☼
E4 3.3.	Reduzir precocemente as relações geométricas a números leva a uma perda da riqueza da própria geometria, pois se muda o campo cognitivo e nos afastamos do desenvolvimento do geométrico.	☼ e ♪
E4 13.2	O sucesso alcançado com a técnica pode impedir o pesquisador de refletir de modo atento e cuidadoso sobre seu próprio fazer	☼ e ♪

♣ *A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático.*

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E2 4.2.	A visualização favorecida pelo computador é bastante utilizada nos teoremas do cálculo	♣

E2 7.2	A figura pode admitir interpretações distintas para os diferentes sujeitos	♣
E2 11.2	As figuras são auxiliares para o pesquisador ter idéias e interpretar o que acontece	♣
E3 5.3.	Não é possível produzir topologia sem os esquemas e eles são importantes para comunicar os resultados obtidos.	♣
E3 6.1.	Em tudo, os esquemas são importantes, inclusive na comunicação de um assunto teórico.	♣
E4 15.2	O sujeito demonstra ter conseguido uma demonstração para um teorema da álgebra em que a geometria se mostra como caminho a ser seguido.	♣
E5 5.1	No ensino, os diagramas são importantes para que o aluno saiba do que o professor está falando e imagine os conceitos matemáticos e as idéias.	♣
E5 7.1	Nas demonstrações de Euclides, o diagrama é importante porque ele é o resultado, a base da construção da demonstração.	♣

Intersecções possíveis: os diagramas favorecem a percepção e a comunicação do compreendido já que a forma final da escrita matemática tem uma linguagem formal que, nem sempre, revela o caminho da produção.

E3 5.2	Os cálculos, tabelas, desenhos são importantes na produção de um artigo em topologia e são guardados porque têm grande importância e não aparecem na escrita final	♠ e ♣

O A figura, o recurso visual, favorece a compreensão de situações matemáticas e indica (abre) um caminho para a prova.

Localização	Interpretação das Asserções (buscando convergências)	Índice
E2 5.3	O computador permite diferentes perspectivas (modos de ver) e faz o aluno pensar em exemplos simples	**O**
E2 11.3	Incentiva os alunos, também, a buscar exemplos simples para terem segurança do que está acontecendo e analisar as possíveis extensões.	**O**
E5 3.1	O suporte do diagrama mostra um caminho para a demonstração.	**O**

Intersecções possíveis: os diagramas são significativos pois abrem um caminho para a prova favorecendo formas distintas de percepção, compreensão e comunicação de idéias.

Localização	**Interpretação das Asserções (buscando convergências)**	**Índice**
E4 4.1	A redução de tudo a números leva, inclusive o matemático, a uma redução do campo de percepção geométrica	O e ♪
E4 4.2	A capacidade geométrica, por ceder lugar ao campo analítico, geométrico, acaba atrofiada.	O e ♪
E4 6.1	O arranjo teórico que está presente em axiomas e pressupostos, utilizados na tarefa matemática, não é muito claro para o aluno.	♠ e ♪

♠ *A expressão final da produção matemática não revela o modo de o matemático pensar.*

Localização	**Interpretação das Asserções (buscando convergências)**	**Índice**
E3 5.1	A escrita final da produção, em topologia, não revela o processo de construção.	♠
E4 12.2	A figura não deve ser tomada como sem importância porque ela pode estar na base constitutiva da formulação matemática	♠
E4 12.3	A questão técnica pode ser necessária devido às restrições de âmbito, mas é preciso ver que há outras formulações que têm uma riqueza de significados igual.	♠
E5 4.1	As publicações matemáticas não revelam a presença (ou a importância) que os diagramas e as figuras tiveram para que o profissional chegasse as conclusões. As publicações utilizam a linguagem formal	♠

Com a organização dos quadros acima, pudemos destacar o modo como as afirmações dos sujeitos foram, para nós, fazendo sentido e como fomos percebendo as intersecções entre suas falas. Essas intersecções revelam que há *Unidades de Significado* que contribuem para mais de uma Categoria Aberta.

No próximo capítulo, mostramos como a análise dos dados vai conduzindo a formação das Categorias Abertas.

4.3. A análise Nomotética: expondo o modo como a interpretação está sendo construída

> *"O termo nomotético deriva-se de* ***nomos****, que significa uso de leis, portanto, normatividade ou generalidade, assumindo um caráter de princípio ou lei. A análise nomotética na pesquisa qualitativa indica um movimento de passagem do nível individual para o geral /.../ [expressam] compreensão das convergências ... dos aspectos que se mostram nas análises ideográficas" (Machado, 1994, p. 42)*

Seguindo, no movimento de interpretação dos dados, passamos da *análise ideográfica* (ou das asserções individuais) para a *análise nomotética*.

Procurando compreender o que as falas dos sujeitos nos dizem sobre o significado dos diagramas, elaboramos os quadros de convergências e agora estamos buscando a construção da *Matriz Nomotética*.

Ao construí-la, a intenção não é apenas buscar uma "normatividade" que nos permita agrupar os dados da pesquisa. Na matriz, procuramos expor mais um dos momentos vividos na busca da compreensão e interpretação do fenômeno investigado. Interrogando o significado epistemológico dos diagramas no ensino de matemática e na produção do conhecimento matemático, ouvimos os dizeres do sujeitos com a atenção voltada para o que, em suas falas, pode elucidar o que é interrogado. Iniciamos o movimento interpretativo procurando colocar, em nossa linguagem, o que pudemos ouvir. Estamos "tomando o impulso para o salto" que é necessário para a efetivação da teorização e para a abertura de novas perspectivas. Organizamos a matriz para mostrar as reduções que foram articuladas nesse movimento de análise e interpretação das falas dos sujeitos .

Nessa nova tabela, planejamos uma estrutura diferente das anteriores. Na primeira coluna, vamos manter uma linguagem muito próxima das *Unidades de Significado,* já articulando as interpretações construídas na análise ideográfica. Na segunda coluna, haverá a localização das unidades de significados que nos permitiram tais articulações. Para isso, usaremos códigos numéricos. Por exemplo, em 1.1, indicamos que a entrevista do sujeito 1, unidade 1, contribuiu para aquela asserção. Como houve mais de uma unidade contribuindo para mesma asserção, colocaremos cinco colunas distintas indicando em quais entrevistas e quais unidades colaboraram para que construíssemos uma mesma asserção. Numa última coluna, indicaremos as reduções ou os primeiros invariantes percebidos em nossas asserções.

O planejamento estava pronto. No entanto, a execução não ocorria como o previsto. Elaborar o modo como vamos trabalhar é uma tarefa relativamente simples. Expressar o que, no movimento, vai sendo percebido pelo pesquisador, já não parece tão fácil. Uma dúvida surgiu logo no início da construção dessa nova tabela: montando os quadros (2) e (3) percebemos que as falas dos sujeitos iam se conectando umas às outras. Como expor essa articulação numa tabela? Demonstrar, na tabela, o elo percebido nas falas tornava-se algo difícil. Optamos, depois de algumas tentativas fracassadas, por inserir linhas intermediárias, destacando as asserções que favoreciam conexões entre diferentes idéias, ou as intersecções que construímos na montagem do quadro anterior.

Nesta fase de análise dos dados da pesquisa, começa a fazer sentido o movimento indicado por Heidegger na metáfora do "salto". A cada passo dado, tomamos novo impulso para seguir em outra direção. Ouvimos os dizeres dos sujeitos entrevistados, percebemos convergências em suas falas e organizamos asserções articuladas a partir do que pudemos interpretar do que os sujeitos diziam.

Estamos imersos num redemoinho que nos arrasta, a cada passo, para novas compreensões. Anunciam-se novos olhares. Vemos, a cada passo da interpretação, anunciar-se o seguinte. A construção da Matriz Nomotética é uma nova etapa da compreensão e interpretação do significado epistemológico dos diagramas no ensino e na produção do conhecimento matemático. Esta etapa possibilita um novo impulso e nos da segurança para o próximo salto.

4.3.1. Matriz Nomotética: construindo as primeiras reduções

<table>
<tr><th>Passos dados</th><th>Sujeitos
asserções articuladas</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>Reduções ou primeiros Invariantes</th></tr>
<tr><td>1º</td><td>Na geometria, o aspecto dedutivo é muito importante. As figuras não servem como demonstração. É preciso justificar os procedimentos usando a linguagem formal.</td><td>1.1
1.3
8.2</td><td>7.4
8.2
8.3</td><td>4.2
7.2</td><td>7.3
8.1
9.1
9.2
9.3
10.1
10.2
11.1</td><td>2.3
3.4</td><td>Há uma valorização da linguagem formal que evidencia, como o modo válido de expressar percepções e constatações em situações matemáticas, a demonstração rigorosa.(os métodos preconizados por Euclides).</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>Conexões vistas: possibilitadas pelas asserções dos sujeitos 2 em 7.3; 9.1; 9.2. Do sujeito 4 em 13.1</td><td colspan="6">A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático ↔ as figuras favorecem conexões entre modos distintos de percepção das situações matemáticas</td></tr>
<tr><td>1º</td><td>Tanto no ensino quanto na produção do conhecimento matemático, há uma importância do aspecto indutivo, das explorações e das conjecturas</td><td>1.2
2.1
2.3
3.1</td><td>1.2
10.1</td><td></td><td>6,2
13.3</td><td>1.1</td><td>As figuras são importantes para que, tanto o aluno quanto o matemático, possam explorar situações, levantar hipóteses e fazer conjecturas.</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>Conexões vistas: possibilitadas pelas asserções dos sujeitos 2 em 10.3; 4 em 14.3 e 5 em 1.1, 3.2, 3.3</td><td colspan="6">As figuras são instrumentos de análise de hipóteses e resultados com vistas à generalização ↔ A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático .</td></tr>
</table>

Passos dados	Sujeitos / asserções articuladas	1	2	3	4	5	Reduções ou primeiros Invariantes
1º	*As figuras são instrumentos de análise de hipóteses e resultados com vistas à generalização.*	*4.1 6.1 8.1*	*11.1*	*8.1 8.2*	*3.1 15.1*	*6.1*	*As figuras favorecem a análise de conjecturas e hipóteses para que uma generalização seja possível.*
2º	Conexões vistas: possibilitadas pelas asserções do sujeitos 1 em 2.2, 5,2; 3 em 3.1, 9.2, 9.4, 10.3; 4 em 2.1, 5,2, 5.3, 15.3 e 5 em 6.1	A figura, o recurso visual, favorece a compreensão de situações matemáticas e indica (abre) um caminho para a prova ↔ as figuras favorecem conexões entre modos distintos de percepção das situações matemáticas ↔ As figuras são importantes na leitura de situações matemáticas para que elas façam sentido.					
1º	As figuras (esboços) são recursos importantes para a construção da imagem do objeto matemático.	3.2	6.1	1.1 4.1			As figuras possibilitam conhecer o objeto matemático
2º	Conexões vistas: possibilitadas pelas asserções dos sujeitos 3 em 2.1 e 2.2	A figura, o recurso visual, favorece a compreensão de situações matemáticas e indica (abre) um caminho para a prova ↔A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático.					
1º	**A exploração de recursos distintos é importante para que o objeto matemático se mostre e seja compreendido.**	**5.1 7.2**	**10.2**	**1.2**	**6.3**		**As explorações de recursos distintos favorecem a compreensão matemática.**
2º	Conexões vistas: possibilitadas pelas asserções dos sujeitos 1 em 7.1; 2 em 7.1; 4 em 12.1, 14.1, 14.2, 16.1 e 17.1	A expressão final da produção matemática não revela o modo de o matemático pensar. ↔ Há percepções distintas e não é possível reduzir tudo a uma única forma de investigação e expressão					
1º	As figuras são importantes na leitura de situações matemáticas para que elas façam sentido.		2.1 5.1 5.2		16.2		As figuras auxiliam na investigação de situações matemáticas
2º	Conexões vistas: possibilitadas pelas	A figura, o recurso visual, favorece a compreensão de situações matemáticas e indica (abre) um caminho					

<table>
<tr><th>Passos dados</th><th>Sujeitos
asserções articuladas</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>Reduções ou primeiros Invariantes</th></tr>
<tr><td></td><td>asserções dos sujeitos 2 em 11.4; 3 em 10.2 e 4 em 5.4</td><td colspan="6">para a prova.↔ A expressão final da produção matemática não revela o modo de o matemático pensar.</td></tr>
<tr><td>1º</td><td>As figuras são elementos de investigação importante ao pensar matemático, mesmo quando elas não são explicitadas ou desenhadas no papel.</td><td></td><td>3.1</td><td>9.1
10.1</td><td></td><td>2.1</td><td>As figuras são recursos de investigação que permitem o levantamento de hipóteses e elaboração de conjecturas.</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>Conexões vistas: possibilitadas pelas asserções dos sujeitos 3 em 1.3, 7.3; 4 em 16.3 e 5 em 1.2</td><td colspan="6">A figura, o recurso visual, favorece a compreensão de situações matemáticas e indica (abre) um caminho para a prova ↔ A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático.</td></tr>
<tr><td>1º</td><td>As figuras favorecem conexões entre modos distintos de percepção das situações matemáticas</td><td></td><td>4.1</td><td>7.1</td><td>1.1
3.2
5.1
7.1
7.2
8.2</td><td></td><td>As figuras possibilitam um modo de ver conteúdos distintos da matemática inter-relacionados.</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>Conexões vistas: possibilitadas pelas asserções dos sujeitos 3 em 4.1; 4 em 3.3. e 13.2</td><td colspan="6">Há percepções distintas e não é possível reduzir tudo a uma única forma de investigação e expressão ↔ A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático.</td></tr>
<tr><td>1º</td><td>A figura é um meio intermediário importante de percepção e expressão tanto para o aluno como para o matemático.</td><td></td><td>4.2
7.2
11.2</td><td>5.3
6.1</td><td>15.2</td><td>5.1
7.1</td><td>As figuras intermediam a investigação e comunicação de percepções matemáticas.</td></tr>
<tr><td>1º</td><td>A figura, o recurso visual, favorece a compreensão de situações matemáticas e indica (abre) um</td><td></td><td>5.3
11.3</td><td></td><td>14.2</td><td>3.1</td><td>As figuras “abrem” um caminho para a prova.</td></tr>
</table>

Passos dados	Sujeitos / asserções articuladas	1	2	3	4	5	Reduções ou primeiros Invariantes
	caminho para a prova.						
1º	**Há percepções distintas e não é possível reduzir tudo a uma única forma de investigação e expressão**				**4.1 4.2**		**Os modos de percepção são distintos e é preciso modos distintos de investigação.**
1º	*A expressão final da produção matemática não revela o modo de o matemático pensar.*			*5.1*	*12.2 12.3*	*4.1*	*O modo de o matemático expressar os resultados obtidos não demonstra a forma como o pensar foi se constituindo.*

4.4. O movimento de redução fenomenológica: construindo as convergências para as *Categorias Abertas*

> *Tornemos presente agora, cada um para si, a Estação Central de Zurique. /.../ Para onde me dirijo ao tornar presente a Estação Central de Zurique? O que é tornado presente, em que penso no tornar presente? ... [Me dirijo] a própria estação existente em Zurique. ... Aquilo em que se pensa ao tornar presente mostra-se de diferentes modos e lugares. Mas cada vez se pensa naquela estação que está lá em Zurique. ... Este resultado, de que o tornar presente a própria Estação Central de Zurique é o que é tornado presente, não pode ser provado. [isso] não é nenhuma falha . Antes, isto, o fato de que o resultado não necessita de prova, é justamente sua vantagem. Porque, se um fato ... precisa ser provado primeiro, então, precisamos para isso recuperar, em cada caso, algo diferente do fato para derivá-lo de lá. /.../ Com referência aos fenômenos e à sua interpretação, qualquer prova, qualquer querer provar vem tarde demais. (Heidegger, 2001, p. 96).*

Para *tornar presente* o movimento que estamos realizando com a intenção de analisar os dados obtidos em nossa pesquisa, vamos fazer uma retomada do que até aqui vimos construindo. Para isso, vamos tomar, como ponto de partida, as três questões que Sevensson, ao falar do modo de conduzir pesquisa sob a orientação fenomenológica, indica como àquelas que o pesquisador deve considerar como estruturais. Elas são relativas ao *modo como os dados são coletados*; ao *modo como os dados são analisados* e à *forma de apresentar os dados* obtidos nos diferentes estágios da pesquisa.

Os *dados da pesquisa* dos quais nos ocupamos são as *descrições dos sujeitos* entrevistados que relatam suas experiências com o *significado epistemológico dos diagramas na produção do conhecimento matemático e no ensino de matemática. .*

Ressaltamos como o movimento interpretativo exigiu-nos uma seleção, nas descrições, de aspectos (ou trechos) que tiveram importância para compreendermos o que é interrogado: falamos das *Unidades de Significados*.

Nelas, percebemos invariantes que nos permitiram ultrapassar as análises individuais das descrições e caminhar num movimento de articulação das idéias expressas nos discursos dos sujeitos.

Vivenciamos, nesse movimento, o processo da redução fenomenológica, procurando identificar, nas falas dos sujeitos, o modo *como eles compreendem o significado epistemológico dos diagramas na produção do conhecimento matemático e no ensino de matemática*, deparamo-nos com *idéias*[41] que nos apontam um *sentido* para o qual convergem os invariantes. Nomeamos essas convergências como se fossem grupos que articulam, num sentido mais geral, o que nos invariantes pudemos ler. São expressões gerais de um grupo de invariantes.

No entanto, essas convergências, puderam, mais uma vez, ser agrupadas pelo modo como vimos articular-se o que nelas estava sendo expresso.

Nesse caminhar dos aspectos individuais expressos nas descrições para os aspectos gerais, resultantes da compreensão do pesquisador à luz da pergunta que orienta a busca, vimo-nos envolvidos no nascimento do que seriam nossas ***categorias* abertas**. As grandes regiões de generalidades que descrevemos anteriormente e que, nesse movimento, saltavam aos nossos olhos e trazemos finalizando este capítulo.

4.4.1. Do quadro de Convergências para o das Categorias Abertas.

Para a elaboração do quadro das Categorias Abertas, valemo-nos dos primeiros invariantes construídos na Matriz Nomotética e elaboramos novas convergências para enunciar essas Categorias que passamos a interpretar no próximo capítulo.

[41] O termo idéia está aqui sendo usado no sentido heideggeriano, ou seja, como o *aparecer nascente*, ou o *vigor imperante* do que se mostra numa evidência originária.

Reduções ou primeiros Invariantes	Nova convergência dos Invariantes	Categorias Abertas
Há uma valorização da linguagem formal que evidencia, como sendo o modo válido de expressar percepções e constatações em situações matemáticas, a demonstração rigorosa. A linguagem formal	C	A: As figuras podem ser modos de investigação, tanto para o aluno quanto para o matemático entenderem hipóteses, teorias e proposições prévias. As figuras favorecem o entendimento de demonstrações. As figuras são um meio de verificar e explorar exemplos.
As figuras são importantes para que se possam explorar situações, levantar hipóteses e fazer conjecturas.	A	
As figuras favorecem a análise de conjecturas e hipóteses para que uma generalização seja possível.	A	
As figuras possibilitam conhecer matemática	B	
A explorações de recursos distintos favorecem a compreensão matemática.	B	B: As figuras são meio de o aluno e o matemático buscarem compreender situações novas. Elas favorecem a investigação de propriedades, permitem levantar hipóteses, fazer conjecturas que levam à produção do conhecimento matemático
As figuras auxiliam na investigação de situações matemáticas	B	
As figuras são recursos de investigação que permitem o levantamento de hipóteses e elaboração de conjecturas.	B	
As figuras possibilitam um modo de ver conteúdos distintos da matemática inter-relacionados.	C	

<table>
<tr><th>Reduções ou primeiros Invariantes</th><th>Nova convergência dos Invariantes</th><th>Categorias Abertas</th></tr>
<tr><td>As figuras intermediam a investigação e comunicação de percepções matemáticas.</td><td>C</td><td rowspan="4">C: As figuras são recursos de linguagem que ajudam a entender as situações matemáticas tanto quanto auxiliam na expressão de idéias. (as figuras são elementos que favorecem a comunicação do percebido, analisado e interpretado, é abertura de possibilidades).</td></tr>
<tr><td>As figuras “abrem” um caminho para a prova.</td><td>A</td></tr>
<tr><td>Os modos de percepção são distintos e é preciso modos distintos de investigação.e comunicação</td><td>C</td></tr>
<tr><td>O modo de o matemático expressar os resultados obtidos não demonstra a forma como o pensar foi se constituindo.</td><td>C</td></tr>
</table>

4.4.2. Escrevendo as Categorias Abertas de modo proposicional

(A) Os diagramas são significativos para o entendimento de situações matemáticas

(B) Os diagramas são significativos na busca de soluções e investigação de situações matemáticas com vistas à generalização.

(C) Os diagramas são recursos de linguagem usados na comunicação do que é compreendido e produzido.

Capítulo V. Interpretação das Categorias Abertas

> “.... diante de numerosas árvores, não vemos a floresta. /.../ em relação às árvores singulares e à sua aglomeração, a floresta é algo diverso. Por conseguinte, ela não é apenas o que acrescentamos conceitualmente e de maneira arbitrária à soma das árvores supostamente dada sozinha: ela não é apenas quantitativamente mais do que uma aglomeração de muitas árvores. Este algo diverso ... é aquilo a partir do que as muitas árvores se mostram como pertencentes a uma floresta” (Heidegger, 2003, p. 398).

5.1. O movimento de interpretação das Categorias Abertas

As *categorias abertas* são o foco deste capítulo. Ocupamo-nos delas para apresentar o conteúdo e a forma do tema que está sendo investigado. Como dissemos anteriormente, elas são expressão de articulações que se mantêm entre as diferentes asserções das falas dos sujeitos. Expressam *sínteses de compreensão* que se tornaram passíveis de agrupamento à luz da interrogação que orienta nosso caminhar. Na diversidade de descrições obtidas foi possível identificar uma *síntese* sustentada pela *unidade de sentido* que permeia o discurso dos sujeitos e nos fala acerca do que estamos investigando.

> “Toda síntese sempre acontece assim quando já se tem uma unidade com referência à qual unem-se coisas. Não se trata de que combinar coisas separadas resulta sempre numa síntese. Tais combinações, sem uma visão prévia de uma unidade, sempre só resultam numa soma. Nunca aconteceria uma unidade visível a partir de simples reunião de pedaços” (Heidegger, 2001, p. 216).

A interpretação das *categorias abertas* revela mais um passo nesse movimento de busca, reflexão e expressão do pesquisador sobre o fenômeno que investiga. Dirige-se para *"libertar"* o sentido do que compreendemos na pesquisa.

5.1.1. (A) Os diagramas são significativos para o entendimento de situações matemáticas.

Iniciamos nosso movimento de análise dessa categoria buscando no léxico o sentido pelo qual a palavra "*entendimento*" pode ser considerada. Encontramos no dicionário "Aurélio Buarque de Holanda", os seguintes verbetes:

> "Entendimento: filos. faculdade de compreender, de pensar ou de conhecer. Entender: [do latim *Intendere*] v.t.d. 1.ter idéia clara de; compreender, perceber. /.../ 2. ter experiência ou conhecimento de; ser perito ou prático em. /.../ 3. inferir; deduzir; concluir; depreender. /.../ 4. crer, achar, pensar. /.../ 5 julgar; interpretar. 6. alcançar a significação, o sentido, a idéia de" (Holanda. 1986, p. 533)

O *entendimento* remete-nos, pois, segundo a significação exposta nesse dicionário, ao conhecimento e à compreensão. Foram esse "conhecimento" e essa "compreensão" que ouvimos nas falas dos sujeitos e consideramos, mesmo que ainda num modo *pré reflexivo*[42], para a nomeação da categoria.

Convergiram, para essa categoria, situações como:

[42] Estamos considerando o *pré reflexivo* conforme o que é descrito por BICUDO (2000) como o que ainda não foi tematizado de modo a poder ser desdobrado em ações de análise reflexão; o que ainda não foi expresso em linguagem proposicional que afirma o compreendido e refletido (p. 39).

- o modo como *as figuras são recursos de investigação de situações matemáticas que favorecem a compreensão da demonstração* pelo aluno;
- o modo como *as figuras favorecem a compreensão* do matemático *das situações abstratas* por redução as mais simples;
- o modo como *as figuras favorecem o aspecto indutivo e permitem a percepção.*

Questionando o que nessas falas pode estar sendo dito, vemos que o *entendimento* refere-se tanto ao modo de *o aluno* lidar com o conhecimento matemático quanto ao de *o matemático* produzir conhecimento.

No que diz respeito ao aluno, o *entendimento* que é favorecido pelas figuras é aquele ligado à compreensão da linguagem formal na qual, por exemplo, os teoremas são expressos ou as demonstrações são construídas. O aluno, ao construir a figura, seja ela com régua e compasso ou com um software no computador, pode utilizá-la como meio de investigação de propriedades para entender o que lhe é apresentado da teoria matemática. As figuras são consideradas *elementos de apoio* à compreensão das situações matemáticas. Elas são *modos* de o aluno ***ver*** o que está sendo exposto na sala de aula, especificamente do ensino superior. São como que elementos intermediários, subjacentes à compreensão da situação matemática e que se abrem ao *entendimento*. Abaixo, destacamos algumas das unidades que contribuíram para essa categoria.

1.3. “é importante fazer o aluno construir figuras /.../ para conjecturar resultados. /.../ a figura entra de uma maneira fundamental, pois é o aspecto visual. Aquilo assume uma postura mais relevante do que quando você faz os aspectos dedutivos da teoria”.

2.10. “a figura pode ser um apoio para você começar a se fazer às perguntas e penso que é isso que buscamos a mais com os nossos alunos quando trabalhamos dessa maneira”.

4.2. "as figuras não são triviais, já que têm elementos em sua composição que merecem atenção. /.../ Se não nos ativermos às evidências geométricas, perdemos a oportunidade de re-qualificação do que vem a seguir (a demonstração formal)".

5.1. "No ensino, as figuras e os diagramas são muito importantes como ponto de apoio ao raciocínio".

Vemos que, nas situações de ensino, as figuras são consideradas, pelos sujeitos da pesquisa, como *elementos auxiliares* para investigar e verificar resultados num modo intuitivo. Elas são elementos iniciais de exploração matemática.

Esse modo de expor o significado das figuras no contexto de ensino, remete-nos a uma exposição de Hadamard em seu livro "*The Mathematician's Mind*", quando ele cita que há, por parte dos alunos, uma maior disposição para o trabalho em sala de aula quando as situações que lhes são propostas são de explorações intuitivas. Afirma, também, que os alunos se negam ou não têm muito êxito no envolvimento com situações que apresentem uma matemática mais rigorosa ou formal.

Perguntamos, então, se o modo de o aluno *entender* as situações matemáticas não está relacionado à compreensão de que nos fala Heidegger quando diz que "nunca conceberemos os conceitos e seu rigor conceitual se não formos primeiramente *tomados*[43] pelo que eles compreendem" (Heidegger, 2003, p. 08).

Assim, o modo de as figuras serem tidas como *auxiliares* ***ao entendimento*** do aluno estaria relacionado ao fato de ele ter argumentos para *fazer deslanchar* seu modo de pensar matemático, buscando exemplos e formas de expressão que lhes fossem significativas. Não seria uma mera tradução da linguagem formal, mas um modo primordial de investigar que o faria *ver* o que, nos enunciados matemáticos, está sendo exposto. Ou, para usarmos os dizeres do sujeito (4) os

[43] A expressão "ser tomado por" traduz o verbo alemão ergreifen e seus derivados Ergriffenheit, ergriffen. Este verbo encontra-se no mesmo âmbito de um outro que dá origem ao termo "conceito" (begreifen – Begriff) e diz literalmente "apanhar", "prender", "apreender". Heidegger joga com estes dois verbos e os utiliza para articular o momento próprio ao conceito: compreender é sempre ao mesmo tempo um ser tomado por isso que se compreende. (N.T.)

diagramas oferecem uma oportunidade de re-qualificação das situações matemáticas, dando, aos alunos, condições de investigá-las. Esse modo de o aluno investigar o levaria à "inteligibilidade do aspecto matemático que se enriquece dada às opções de entendimento".

Olhemos, agora, para outra faceta do *entendimento*: o modo como as figuras favorecem o *entendimento* para o matemático.

Nas descrições dos nossos sujeitos, esse entendimento se revela em asserções do tipo:

2.1. "quando eu estou pensando ... eu gosto de pensar uma situação mais simples possível, mais baixa possível, em R ou R^2, em que eu possa fazer um desenho e ter um sentimento do que está acontecendo ali".

2.11. "num trabalho de pesquisa de complementaridade de cones ... apesar de estarmos pensando em dimensões mais altas, fomos buscar um exemplo em dimensão 2 onde pudéssemos enxergar, concretizar e ver o que estava acontecendo para poder ampliar nossa teoria e isso nos ajudou bastante a ter outras idéias e a interpretar o que estava acontecendo".

5.6. "quando você trabalha no R^n, vamos dizer, ele é simplesmente uma generalização do R. E você tem esses diagramas no R e trata de imaginá-los no R^n ... o diagrama é sempre usado, por mais abstrata que seja a teoria, por menos que você consiga ver, o que se faz é sempre estudar casos particulares em que essas coisas podem ser visualizadas e, depois, procurar estendê-las para os resultados, aí sim só do ponto de vista matemático".

Essas asserções nos dizem que o matemático também busca *ver* o que está sendo elaborado em seu processo criativo. Nesse *ver,* as figuras são cruciais. Elas são recursos que possibilitam uma ampliação da teoria, uma generalização dos aspectos particulares. O processo de criação, ou produção matemática, envolve, também esse *ver*. É importante para o matemático *ver* o que produz, tanto quanto é importante para o aluno *ver* o que lhe é apresentado.

Uma citação de Poincaré, feita por Hadamard, vem ao encontro do que estamos argumentando.

A partir dos depoimentos dos sujeitos desta pesquisa, podemos compreender que:

> "entre o trabalho dos alunos que tentam resolver um problema de geometria ou de álgebra e o trabalho de invenção, pode-se dizer que há apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, ambos os trabalhos começam com natureza semelhante[44]". (Hadamard, 1996, p. 104).

Notamos, no relato dos sujeitos, que o que está em jogo, no processo de produção matemática, é o modo como o matemático procede na sua produção. Ele ***vê*** nas figuras um modo de "testar seus resultados", de validar suas hipóteses em casos mais simples, particulares, e procurar, via teoria, ou contexto formal, estendê-la ou generalizá-la. O modo como as figuras provêm o *entendimento* para o matemático surge num *nível diferente*: enquanto o aluno busca ***ver*** a figura para ter idéia de como irá tratar com uma situação que lhe é apresentada, ou sugerida, como ele irá ler e escrever matemática, o matemático busca *ver* a figura para *ter* a *idéia*, para produzir matemática[45].

Investigar a natureza desse ***ver*** leva-nos à compreensão da diferença de nível de que fala Poincaré e que vimos emergir na interpretação da categoria do entendimento.

O ***ver*** ao qual nos referimos é aquele trabalhado por Heidegger e Merleau-Ponty e que consiste num *olhar de dentro*, no lidar cotidiano, daquele que se envolve com a Matemática. É esse *ver* que permite que aquilo com o que se lida se mostre. É um ver que é "por princípio, mais do que se vê, é ter acesso a um ser de latência" (Merleau-Ponty, 1992, p. 21), que nos leva às extremidades *invisíveis* de algo que nos mostra de si um lado, ocultando o outro. É o que impele à investigação. É o que *denuncia* o que se mostra na própria ação de encobrir-se. É o que faz com que o *invisível* não seja contraditório ao *visível,* mas seja seu "relevo e [sua] profundidade" (idem. Ibidem).

---

[44] Between the work of the student who tries to solve a problem in geometry or algebra and work of invention, one can say that there is only a difference or degree, a difference of level, both Works being of a similar nature.

[45] Consideramos importante esclarecer que essa é a compreensão dos matemáticos, professores de matemática, depoentes na pesquisa, sobre a compreensão de seus alunos.

É um modo de *tornar presente* o que está sendo posto como um objeto de *entendimento* que, embora no seu próprio tornar presente não exija nenhuma prova, *ilumina* o que, no tornar presente, será provado.

Os diagramas favorecem o *entendimento,* pois não são apenas uma opção de “tomar conhecimento” buscando oportunidade de visão sem parar para meditar. Eles propiciam o entendimento matemático na medida em que nos põem para *refletir sobre o que é visto,* na medida em que nos fazem investigar o visível. Ou, para usarmos os dizeres de Heidegger, os diagramas favorecem um modo de

> “pensamento que medita e exige de nós que não fiquemos unilateralmente presos a uma representação, que não continuemos a correr em sentido único na direção de uma representação. O pensamento que medita exige que nos ocupemos daquilo que, à primeira vista, parece inconciliável” (Heidegger, p. 23, s/d).

Assim, mesmo que os sujeitos revelem, em momentos distintos de suas falas, uma preocupação com o aspecto enganoso das figuras que podem levar a paradoxos, pode-se dizer, parafraseando o sujeito 4, que a reflexão favorecida pelos diagramas leva o matemático a buscar a origem das formulações técnicas que permitem compreender as relações (conexões) entre a percepção e a expressão formal com vistas à compreensão das analogias feitas para as demonstrações a partir das associações imaginativas que permitam entender as construções ou elaborações desse teor técnico.

Esse modo de os diagramas serem significativos para o *entendimento das situações matemáticas* não é isolado das outras categorias que, a seguir, passaremos a analisar. Ele é um modo de ***ver*** a significação dos diagramas que abre caminhos, ilumina outras buscas e nos encaminha para novas sínteses, fazendo com que nos envolvamos com o pensar que medita.

5.1.2. (B) Os diagramas são significativos na busca de soluções e na investigação de situações matemáticas com vistas à generalização

Contribuem para a construção dessa categoria asserções que valorizam:

- o modo como os diagramas possibilitam o *conhecimento matemático,*
- o modo como os diagramas *mostram um caminho para a demonstração,*
- o modo como os diagramas *desencadeiam a*s *idéias* que levam o aluno à compreensão da demonstração e o matemático à sua construção.

Terminamos a análise da categoria anterior (do entendimento) trazendo os dizeres de Heidegger sobre o pensar. Agora, pretendemos expor, ao iniciar a análise desta categoria, como, para nós, esse pensar volta à tona.

Heidegger, em Serenidade (s/d), faz uma distinção entre dois modos de pensar: o pensamento que calcula e a reflexão (*Nachdenken*) que medita (Heidegger, s/d, p. 13). Embora essas duas formas de pensar sejam igualmente legitimas e necessárias para o autor, ele salienta que o pensamento que calcula corre de oportunidade em oportunidade ... nunca pára, nunca chega a meditar (idem, ibidem).

Já o pensamento que medita, como não surge de modo espontâneo, exige um grande esforço. Ele requer treino e cuidado. No entanto, afirma Heidegger, qualquer um que deseje pode envolver-se num tal pensar já que o Homem é um ser (*wesen*) que pensa, ou seja, que medita (s*innenle*). Não precisamos, de modo algum, elevar-nos às “regiões superiores” quando refletimos. Basta demorarmo-nos (*verwilen*) junto do que está perto e meditarmos. (idem, p. 14).

Quando vemos o modo como os diagramas se revelam significativos ao processo de generalização em matemática, ouvimos Heidegger falar do pensar meditativo.

Ao mesmo tempo em que os sujeitos de nossa pesquisa mostram a importância de, para a construção do conhecimento matemático, haver uma busca de similaridades, de padrões e de propriedades comuns que favoreçam as conjecturas e promovam o raciocínio, eles revelam uma suspeição acerca do uso dos diagramas que, embora não os invalide, alerta para o fato de que as conclusões a que se chegam, tomando os diagramas como apoio, são apenas prováveis e podem ser refutadas. Há ênfase na necessidade de demonstrar as conclusões, de usar o raciocínio dedutivo, mas há indicações de ter um solo construído para isso que pode ser propiciado pelos diagramas. Há a necessidade do pensar meditativo.

Os sujeitos dizem:

1.3. "é importante fazer o aluno construir figuras, ou com régua e compasso, ou usando algum software de construção geométrica /../ para conjecturar resultados. Aí sim, a figura entra de uma maneira fundamental, pois é o aspecto visual. Aquilo assume uma postura muito mais relevante do que quando você faz os aspectos dedutivos da teoria".

2.5. "você produzir uma figura no computador /.../ e tirar o que você puder daquela figura, fazer as perguntas, conseguir responder /.../ é a busca do significado daquele diagrama para o aluno. É a interpretação, o que ele pode tirar, é a leitura dele /.../ é mais do que enxergar, é fazer sentido".

2.10. "a figura pode ser um apoio para você começar a se fazer perguntas. Penso que é isso que buscamos a mais com os nossos alunos quando trabalhamos dessa maneira".

Para nossos sujeitos, matemáticos e professores de matemática, os diagramas, quando investigados por seus alunos, podem levar à compreensão do que é explicitado na teoria. O aluno deve, segundo dizem os sujeitos, construir o diagrama e procurar explorá-lo de modo a retirar informações que lhe permita compreender a situação revelada na construção *daquele diagrama específico.* Conforme afirmam, a análise ajuda o aluno a ver por que um enunciado particular pode ser verdadeiro. Essa situação exige um trabalho de interpretação que não requer um expectador, mas um sujeito ativo que possa reconhecer relações internas ao objeto investigado, considerando os conhecimentos teóricos prévios que conferem, a esse diagrama, seu fundamento..

A investigação do diagrama irá requerer uma exposição da análise feita pelo aluno. Ele irá expor o modo como o está interpretando, como pôde fazer associações que, embora simples, já que se consideram exemplos particulares, são essenciais à generalização e o permitem ver, por exemplo, como diz o sujeito (2), o ponto de interseção de duas retas como sendo a solução de um sistema linear.

Interpretamos, em falas como essas, que os diagramas, para esses professores, são recursos que permitem aos seus alunos, compreender a lógica das demonstrações pois, podendo fazer análise a partir de exemplos particulares, ele investiga situações de modo visual e vai sendo levado a pensar em casos mais gerais. Esse é o modo como nos aproximamos do pensar meditativo que descrevemos na citação de Heidegger. O pensar que põe o que se ocupa da matemática, numa situação de investigação é, também, o pensar que o impulsiona a buscar palavras que expressem o conteúdo matemático percebido no diagrama levando-o a construir uma demonstração cujo solo é insinuado no *ver*. O diagrama lhe dá “pistas visuais” que podem ajudá-lo a ver como poderia começar uma prova. Mesmo que essa prova não seja, inicialmente, formal, rigorosa, os diagramas podem incentivar a comunicação do que foi compreendido na situação que estava sendo investigada.

Valorizando os aspectos perceptivos, a construção das demonstrações feitas na linguagem argumentativa pode vir a ser compreendida, e a preocupação com a generalização pode adquirir um novo olhar. A generalização passa a ser vista como um processo de investigação do particular.

Isso faria sentido para a aprendizagem matemática? Essa é uma questão que se põe no momento em que a análise vai se mostrando. Ela nos leva a buscar clareza, novamente, nos dizeres dos sujeitos e encontramos novas asserções que permitem a continuidade do nosso raciocínio.

Consideremos as falas do sujeito (2), do sujeito (3) e do sujeito (5):

2.11 "num trabalho de pesquisa de complementaridade de cones /.../ apesar de estarmos pensando em dimensões mais altas, fomos buscar um exemplo em dimensão 2 onde pudéssemos enxergar, concretizar e ver o que estava acontecendo para poder ampliar nossa teoria e isso nos ajudou bastante a ter idéias e a interpretar o que estava acontecendo. E é isso que falamos para os nossos alunos. /.../ Alguma coisa tem que estar seguro nas suas mãos para poder analisar as outras variáveis".

3.8 "mesmo na história, muita coisa surgiu dessa forma, você parte do concreto, de uma figura e depois tenta formalizar. /.../ Ninguém lançou na forma de equações, já tudo pronto. Veio passo a passo até chegar num nível formalizado".

5.3. "esse suporte é para dar idéias, para fixar os conceitos, e mais, também para auxiliar na demonstração porque, muitas vezes você olhando um diagramazinho vê um caminho a ser percorrido para obter a demonstração que você quer. Eu acho que um exemplo marcante dessa parte ... é o tratado de Arquimedes, O Método, /.../ [para] fazer as descobertas das proposições matemáticas ele utiliza /.../ balança, alavanca, e tudo que é possível .... depois de obtido o resultado ... ele diz: bom isso tudo é esquecido e agora eu vou trabalhar segundo os métodos da geometria, preconizados por Euclides".

Os sujeitos re-afirmam a importância da evidência dada na figura acompanhada de uma generalização, citando seu processo de investigação e a própria história da produção do conhecimento matemático. Eles nos animam à busca.

Em James Robert Brown (1999), vimos que as figuras, em alguns casos, são ricas fontes de insight mas que não se pode trocar o rigor pela evidência dada na figura, já que ela pode ser altamente enganosa. No entanto, afirma, algumas figuras favorecem a justificação de situações matemáticas. Para exemplificar isso, ele cita Roger Nelsen, que, no seu livro *Proofs Without Words* (1995), traz um grande número de preciosidades nesse sentido, mostrando que o principal numa figura é que elas são, principalmente, *formas de evidência* diferentes daquelas dadas nas provas verbais ou simbólicas. Mas alerta: embora as figuras possam ter um resultado "obvio", o "óbvio" e o imediato não são, necessariamente, o mesmo. Freqüentemente, precisamos trabalhar nela por um tempo[46]" (Brown, 1999, p. 43. Tradução Livre). Ou seja, mesmo considerando-se o aspecto visual, é requerida uma habilidade para a justificação, pois as figuras, algumas vezes, favorecem o insight e a compreensão, e, outras vezes, não. Ela, tanto quanto as demonstrações verbais, exigem investigação. Na investigação, o caminho para a compreensão do objeto matemático se abre e a generalização passa a fazer sentido.

A visualização leva ao pensar e pode ser compreendida, segundo Miguel de Guzmán (1996), como uma operação cognitiva que busca a decodificação do que é visto. Requer análise, interpretação e expressão do percebido.

Esse caminho da análise, interpretação e expressão é também o percorrido pelo matemático na sua produção. O matemático busca, por um lado, fazer conjecturas e, por outro, demonstrar que elas são verdadeiras, partindo de alguns pressupostos iniciais (os axiomas).

Quando se demonstram essas hipóteses iniciais, elas passam a fazer parte do corpo matemático. Elas são teoremas.

Em cada teorema, há esforços desenvolvidos para obtê-los no estado de conjectura e esforços para fazer com que o novo enunciado, por meio de um raciocínio dedutivo, se desprenda do já conhecido. O caminho que é percorrido desde a conjectura até o teorema é um desafio. O matemático, ao se envolver na busca de um resultado pressentido como verdadeiro ou ao se envolver na construção da demonstração de um teorema já provado, vivencia esse desafio. Em cada uma dessas situações, ele coloca em jogo todas as suas capacidades para chegar ao resultado requerido, para desvendar os elementos ocultos e, a

[46] Remember, pictures may make a result "obvious", but obvious and immediate need not be the same thing.

princípio, desconhecidos, que estão circunscritos ao assunto que lhe interessa. Ele trabalha para *ver* o que está ali. No entanto, muitas vezes, a visibilidade lhe foge. Ele precisa de um "porto seguro" que lhe *desencadeie as idéias*.

Hersh, citando Pierce, diz que

> A maioria dos teoremas matemáticos não é confirmada em seus termos gerais. É necessário que sejam dadas definições e esquemas individuais, ou diagramas – em geometria, uma figura composta por linhas com letras anexadas; na álgebra um arranjo de letras das quais algumas são repetidas. Depois que o esquema foi construído de acordo para uma percepção visual contida na tese, a asserção do teorema é evidentemente verdadeira. Pensar em termos gerais não é suficiente. É necessário que alguma coisa seja *dada*[47] (Hersh, 1997, p. 199. Tradução livre).

A investigação do diagrama é particular mas a busca do que se investiga é geral. Nossos sujeitos nos mostram que, ao vivenciarem situações dessa natureza, buscam segurança em fatos conhecidos para prosseguirem a investigação. Os diagramas estão presentes, mesmo nos dias atuais, na produção do conhecimento matemático e se revelam, nas falas dos sujeitos. No seu modo de dizer, podemos perceber que os diagramas, também,

- auxiliam a visão do caminho percorrido para a demonstração, ou seja, eles dão idéias para a prova,

- auxiliam no processo de investigação da validade do caminho escolhido.

Essa interpretação pode ser construída no ouvir dos dizeres de vários sujeitos. Dentre eles:

1.5. [para investigar a teoria das superfícies mínimas, o matemático] colocou as equações no computador. A princípio, ele não enxergava muita coisa na tela do computador, mas, rodando a figura, colocando-a em outras posições, ele começou a perceber algumas simetrias. /.../ a partir

---

Often you will have to work at it for a while.

[47] In the major theorems it will not do to confine oneself to general terms. It is necessary to set down some individual and definite schema, or diagram – in geometry, a figure composed of lines with letters attached; in algebra an array of letters of which some are repeated. After the schema has been constructed according to the percept virtually contained in these, the assertion of the theorem is evidently true. Thinking in general terms is not enough. It is necessary that something should be *done*.

dessas indicações /.../ ele começou a tentar mostrar, a fazer a conta algebricamente.

2.1. os diagramas fazem parte da minha vida. /.../ Quando eu estou pensando /.../ eu gosto de pensar uma situação mais simples possível, mais baixa possível, em R em R_2, em que eu possa fazer um desenho e perceber o que está acontecendo.

3.4. [para fazer] uma demonstração você tenta, pensa uma figura, com aquilo, o que vai ser a demonstração, o que você pode tirar dali e daí você vai formalizar.

3.9. mesmo o matemático. É uma coisa que ele não abandona mais. Ele sempre vai buscar lá para poder chegar no objetivo final, ele vai buscar lá, na figura, /.../ por mais abstrata que seja a teoria.

5.6. o diagrama sempre é usado, por mais abstrata que seja a teoria, por menos que você consiga ver, o que se faz é sempre estudar casos particulares em que essas coisas podem ser visualizadas e, depois, procurar estendê-las para os resultados, aí sim só do ponto de vista matemático.

Essas asserções, entre outras que destacamos no quadro de convergências, nos permitem dizer que, no processo de construção do conhecimento, o matemático busca um recurso informal anterior à linguagem. Não há apenas o pensar que calcula, citado por Heidegger, que é governado pela manipulação de conceitos e representações. Há uma atenção ao que se mostra na evidência. Os diagramas são significativos nessa produção do conhecimento à medida que evidenciam possibilidades de investigação e compreensão da situação que se está querendo demonstrar. Isso sugere que a produção matemática não é construída na prova. Ou seja, ao provar, o matemático torna explícito um pensar que já foi organizado e compreendido. A clareza necessária a esse movimento é dada pela percepção do que está sendo construído (*erlebinis* – isto é, ela se faz na vivência ou, como fala Dilthey, na experiência percebida conscientemente), pelo conhecimento prévio e pelo modo de se envolver com a situação. A demonstração traz a validação da conjectura, mas o diagrama pode auxiliar o matemático a interrogar a própria demonstração construída.

4.15 Quando você tenta fazer argumentações que pareciam que iam fluir de acordo com a expectativa e começam a enroscar /.../ buscamos ver o que está acontecendo. Primeiro, /.../ tecnicamente. É uma falha do modo de combinar as coisas usualmente combináveis /.../ ou está tendo um misto de problema técnico com cognitivo? [Eu] /.../ ao converter inversões rotatórias em reflexões rotatórias na geometria espacial, precisei ficar desenhando planos para ver onde é que estava falhando o argumento /.../ tive que desmembrar tanto as contas quanto os desenhos e, no final, acabei constatando que o plano que eu estava pegando numa certa ordem é que estava errado.

O dizer do sujeito mostra que há um sentimento que governa o seu proceder que é dado pelo conhecimento e pela linguagem matemática. Mas há também uma necessidade de verificação do caminho construído que não leva ao ponto de chegada pretendido. Essa verificação leva o matemático a recorrer às figuras para compreender o equívoco cometido. Essa análise nos conduz do que é percebido e do que é construído, no pensar, para o que é expresso como produto final. Isso nos encaminha para a interrogação da ***linguagem***. Indagamos: haveria uma unidade nesse processo que vai do pensar ao expressar? Esse fazer do matemático é refletido no ensinar matemática?

O matemático é um sujeito que detém um conhecimento que o habilita a questionar o seu fazer, investigar os recursos usados e encontrar as “falhas” numa demonstração. E o aluno?

De acordo com as afirmações de nossos sujeitos, professores de matemática, o aluno não dispõe de habilidades e conhecimentos específicos à matemática e à sua produção para *ex-por-se*. E, ao negligenciarmos os recursos que podem favorecer o seu desenvolvimento, eliminamos opções de aprendizagem matemática.

Os diagramas são opções de investigação e, mesmo que sejam tomados como objetos sensíveis ou intuitivos, nossos dados vão mostrando que eles podem ser valorizados.

A interrogação que orienta nossa busca começa a dar indicações de sua abrangência: investigar o significado epistemológico dos diagramas no ensino e na produção matemática faz-nos olhar na direção dos elementos do conhecimento matemático que merecem atenção. Vamos compreendendo que eles são significativos de diferentes modos e, ao encerrar a análise desta categoria que discute, em especial, o modo de o conhecimento matemático ser construído, gostaríamos de trazer o alerta dado pelo Sujeito (4) que, neste momento da análise, traz clareza ao nosso pensar. Segundo ele,

4.11. "[ao ensinar matemática é preciso um cuidado para que não se perca] a riqueza das coisas que são tomadas como banais, como sendo desprovidas de riquezas, /.../ [pois] as pessoas dominam tecnicamente uma certa faixa daquela estrutura complexa, matemática, mas são completamente insensíveis ou cegas para outros aspectos que estão naquele campo sofisticado porque elas têm o domínio da técnica, daquelas coisas, mas lá atrás, na base, ela desconsiderou, tomou como não sendo importantes certas coisas que são extremamente constitutivas do que veio a ser toda essa formulação sofisticada da matemática".

É preciso buscar compreender a região do conhecimento Matemático como uma articulação de diferentes aspectos da realidade Matemática, como álgebra, geometria, etc.

5.1.3. (C) Os diagramas são *recursos de expressão* usados na comunicação do compreendido, interpretado e produzido.

> " /..../ a unidade da coisa não está atrás de cada uma das suas qualidades: por cada uma delas é reafirmada, cada uma delas é coisa inteira. /.../ As coisas não são, portanto, diante de nós simples *objectos* neutros, que contemplaríamos; cada uma delas simboliza para nós uma certa conduta, lembrá-la, provoca em nós reações favoráveis ou desfavoráveis". (Merleau-Ponty, 2002).

Para esta categoria, contribuem asserções que nos permitem interpretar as *diferentes formas de o sujeito comunicar o percebido, analisado e interpretado em uma situação matemática.* As asserções aparecem, para nós, de dois modos distintos, porém não excludentes. Queremos destacar, neste movimento de análise da categoria, o que compreendemos sobre:

- o modo como o diagrama favorece o diálogo e a expressão pela linguagem, nas situações de sala de aula,
- o modo como o diagrama auxilia o matemático a sustentar o movimento do seu pensar e expor sua produção.

Na categoria tratada anteriormente (a busca de soluções), já se tangenciou a questão da linguagem pois quando, nas situações de ensino, o professor dispõe-se a investigar o diagrama, dele extrair informações e comunicar o percebido, já se diz de uma linguagem. No entanto, a linguagem não foi o foco da discussão. Por isso consideramos importante construir uma categoria em que pudéssemos tratar do modo como entendemos que a *linguagem* se destaca nas falas dos sujeitos, remetendo-nos ao significado dos diagramas como recursos de linguagem - - *considerada com a conotação de semântica, na media em que o diagrama diz pela linguagem* .

Um dos primeiros invariantes que nos fez pensar nesta categoria foi "a valorização da linguagem formal e das demonstrações em matemática". A intenção não é investigar a natureza de uma demonstração. Trabalhos como o de Russel (2001), Brow (1999), Hersh (1999), Garnica (1995), Arsac (1987) e outros, possibilitam-nos compreender as diferentes concepções que cercam as provas e demonstrações em matemática e entender como a concepção de demonstração varia de acordo com o período da história, a cultura e a comunidade a que nos referimos. Alguns aspectos, no entanto, podem ser, hoje, destacados ao falarmos em demonstração: a generalidade e a certeza, por exemplo.

Russel (2001) nos diz que

> a generalidade da prova e da demonstração é precisamente invenção grega. Em matemática, a função da prova se destaca mais claramente do que na maioria das outras ciências, embora o que realmente aconteça numa demonstração matemática tenha sido, freqüentemente, questionado e muitas vezes mal-entendido. (Russel, 2001, p. 137).

Ou seja, a preocupação com a generalidade da prova matemática vem de longa data e é parte integrante do discurso matemático. Sendo assim, ao entrevistarmos matemáticos acerca do seu pensar sobre diagramas, é natural que apareça, em suas falas, o destaque das demonstrações. Ela é o veículo de comunicação matemática imperante, até hoje, na cultura ocidental.

Porém, outros invariantes que nos levam a esta categoria como o fato de “as figuras intermediarem a investigação e a comunicação de percepções matemáticas” ou “o modo de o matemático expressar os resultados obtidos não demonstrar a forma como o pensar foi se constituindo”, é o que nos chama a atenção e nos faz analisar as falas dos sujeitos que nos levam a interpretar a linguagem.

Como compreender a linguagem com a idéia de comunicação e expressão a partir dos diagramas?

Para Heidegger,

> temos que *aprender a pensar a linguagem a partir do dizer* e esse *enquanto um deixar pro-por* (λὸγος) *e fazer aparecer* (φάσiς). De início, é difícil satisfazer esse apelo porque o iluminar-se do vigor essencial da linguagem como dizer desaparece logo sob um véu. Em seu lugar, passa a imperar a determinação e representação da linguagem a partir da φωνή, da articulação sonora, enquanto um sistema de designação e significação e, por fim, como sistema de comunicação e informação. (Heidegger, 2002, p. 217).

Seria o diagrama esse *pro-por* que diz? Seriam eles aquilo que *faz aparecer* e *ilumina o que se mostra* para o sujeito que o investiga?

Os dizeres dos nossos sujeitos indicam-nos que existe a possibilidade de os diagramas terem esse significado para o matemático.

5.2. É interessante você presenciar uma conversa entre matemáticos de altíssimo nível, um deles diz assim: "não, mas o rabinho da função, mas essa linhazinha aqui". Tudo isso, na verdade, é a imagem mental ou a imagem que se desenhou, ou seja, um diagrama.

O fato de o matemático desenhar a figura, no papel ou na imaginação, nos permite interpretar que, para ele, o diagrama é um recurso de organização e comunicação da idéia. O matemático, ao explorar o diagrama, busca por aquilo que o diagrama lhe propõe, pelo que ele lhe diz. Ilumina-se, para o matemático, na evidência dada no diagrama, o dizer de algo que é proposto. Inicia-se um processo de organização e comunicação. O "rabinho da função" expõe-se na figura e na linguagem sonora, mas é "trabalhado" pelo matemático para ser enunciado na linguagem escrita, conforme diz o próprio sujeito.

5.4. Evidentemente, na publicação, ele não irá falar do rabinho da função, ele vai dizer as coisas do ponto de vista matemático. Mas isso tudo serviu de suporte /.../ os diagramas, as figuras são muito importantes e todos os matemáticos profissionais sabem disso.

Essa fala do sujeito remete-nos às palavras de Heidegger quando ele diz que no lugar do vigor da linguagem impera um sistema de articulação, de comunicação e de informação. O matemático, ao comunicar o que no diagrama foi proposto, faz como que uma "tradução" da linguagem e expõe o percebido em sua forma final de articulação compreensiva. Ou seja, ao lermos uma comunicação matemática, um texto matemático, qual o sentido que se revela? Certamente, não é o da intuição primeira. Essa intuição se apaga, perde a luminosidade, ao longo do trabalho, e o que é transmitido no texto é o resultado do processo de análise e síntese do matemático.

Saraiva (1992) argumenta que uma das possíveis causas para isso se relaciona ao fato de que os modelos requeridos, atualmente, para as publicações em Matemática, na maioria dos casos, consideram os diagramas inaceitáveis.

Falas de outros sujeitos de nossa pesquisa colaboram para que possamos ver a importância dos diagramas como *o dizer que faz aparecer e ilumina* o que se mostra, mesmo que eles não estejam presentes na forma final de comunicação do produzido.

3.4. quando a gente está pensando, usa tabelas, "desenhinhos" e tudo, mas aí, quando você vai redigir, você tira tudo isso. /.../ Você vai escrever a generalização e não coloca tudo aquilo, mas tudo foi importante para você chegar ao resultado, descobrir isso /.../ e, às vezes, com os esquemas é mais fácil você passar para outras pessoas.

Embora haja um reconhecimento da importância do diagrama como recurso de expressão, como algo que é capaz de pro-por e dizer ao matemático, a escrita final da produção não o considera. O matemático, às vezes, considera-o numa comunicação para o outro, ou seja, na informalidade da linguagem falada, na oralidade.

3.9. na geometria mesmo, se é uma coisa mais complicada, você pega exemplos simples, coisas palpáveis, para, depois, ir para o mais abstrato e verificar se vale em geral. /.../ O produto final é uma coisa geral e você não coloca todos os casos usados porque foram casos particulares que foram estudados para perceber que vale o geral.

Ou seja, as publicações matemáticas comunicam os "resultados finais" e não o processo usado para que o pensar fosse construído. A linguagem matemática, da forma como é expressa ao leitor, elimina a evidência do perceptivo, o processo de amadurecimento de idéias e aquele da busca de soluções. Mas não seria essa exatamente a função da linguagem, como diz Merleau-Ponty? "Um resultado da linguagem é fazer-se esquecer ao conseguir exprimir". (Merleau-Ponty, 2002a, p. 31). Com esta afirmação o autor nos faz compreender que, se a linguagem expressa, se ela comunica, nós passamos a não dar atenção aos seus símbolos, às palavras ou às páginas lidas pois o que "salta aos olhos" é o sentido do que está impresso nessas páginas. Isso ocorreria também com a linguagem matemática ao expressar. Seus símbolos dizem do sentido a que eles nos remetem. Mas para quem esses símbolos dizem? Talvez, para o matemático. E esse "talvez" que empregamos embasa-se nos dizeres de nossos próprios sujeitos quando eles afirmam que, mesmo para comunicar ao outro, os diagramas, tabelas e desenhos podem ser importantes. Isso nos leva ao que buscamos compreender nas leituras iniciais de nosso trabalho e identificamos, entre os gregos, modos distintos de comunicar as produções matemáticas valendo-se de certos tipos de diagramas para a comunicação escrita e outros para a comunicação oral. Talvez aqui volte a fazer sentido a fala de Merleau-Ponty identificando na linguagem duas formas distintas:

> "a linguagem de depois, a que é adquirida e que desaparece diante do sentido do qual se tornou portadora, e a que se faz no momento da expressão, que vai justamente fazer-me passar dos signos ao sentido – a linguagem falada e a linguagem falante". (idem, p. 32).

A linguagem matemática só expressa algo se os signos que o autor usa para comunicar são compreendidos por mim, ou seja, eu e o autor concordamos porque compartilhamos das mesmas significações adquiridas e disponíveis. A “leitura é um confronto entre a minha fala e a fala do autor” (idem, p. 35). Nesse confronto, as intersecções vão se multiplicando, novos sentidos vão sendo constituídos e o autor me induz ao seu pensar de tal modo que a voz do autor toma posse da minha. A linguagem falada que eu trazia comigo vai cedendo lugar à linguagem falante que se constrói na elaboração de novos significados promovidos pela expressão.

O “rabinho da função” é a linguagem falada, é o signo comum que compartilhamos no início da conversa, é o dizer do diagrama que permite que vejamos a mesma imagem ao falarmos dela. No dizer matemático, o “rabinho da função” vai desaparecendo, ele vai dando lugar à significação que o matemático procura comunicar. A linguagem falante, o sistema de designação e significação, passa a imperar. Leio o “rabinho da função”, não mais no diagrama mas na escrita do matemático. O esclarecimento da razão passa a *pro-por* iluminado pela evidência da *visio*, pela visão esclarecedora.

Há, porém, um outro ponto que, nos invariantes para essa categoria, nos chama a atenção: “os modos de percepção são distintos e é preciso modos distintos de investigação” e “as figuras possibilitam um modo de ver conteúdos distintos da matemática inter-relacionados”. A nossa atenção se volta para essas questões, considerando o trabalho de sala de aula e a possível posição do aluno nesse processo de comunicação da linguagem matemática. O sujeito (2) expressa uma preocupação com o modo como as “combinações de linguagens” podem se integrar.

2.7 eu percebi que essa combinação das linguagens, da linguagem computacional, com a visual, a pictórica da imagem e a linguagem escrita, toda essa combinação, esse conjunto, pode produzir muito conhecimento sim.

2.8. [mas] não basta você ficar só na exploração. A idéia é construir uma base, fazer exploração, concretizar um resultado de uma maneira visual, exploratório e, depois, conseguir justificar. Mas isso não é uma passagem fácil. /.../ a visualização ajuda, estimula, favorece alguns /.../ mas não é uma mágica.

No lidar cotidiano da sala de aula, os diagramas, as imagens, são recursos importantes para desencadear o processo de pensamento, para sugerir um caminho para a prova, para fazer análise de situações e investigar resultados. Tudo isso conseguimos ver nas falas dos sujeitos. Mas como caminhar da linguagem informal, da expressão do diagrama, a linguagens formais, simbólicas, verbais?

Sobre isso, a leitura dos discursos dos sujeitos não nos dá pistas. Eles nos dizem que há modos de percepção distintos e modos distintos, também, de investigar situações matemáticas. Dizem perceber essa distinção como formas de cognição e que a "passagem" de um campo a outro, às vezes, são verdadeiros "saltos mortais". Mas nossas leituras em filosofia, filosofia da matemática e didática da matemática nos mostram que há um solo favorecido pelo diagrama que pode levar o aluno à evidência matemática.

As chamadas "*provas sem palavras*", propostas pelo professor Rufus Isaacs em 1975 na revista *Mathematics Magazine* e, mais atualmente, por Roger B. Nelsen, no livro *"Proofs Without words: exercises in Visual Thinking"* de 1993, podem ser encontradas desde os matemáticos que antecederam a Thales (640 – 550 a.C.). A Filosofia da Matemática nos mostra que eles se valiam de exemplos visuais como modelos para investigar e entender os casos mais gerais e de diagramas que tinham seus enunciados óbvios. Segundo Roberto Doniez Soro, esses matemáticos "não desenvolveram uma linguagem simbólica adequada para expressar as idéias gerais, pois as demonstrações sem palavras eram as suas demonstrações[48]" (Soro, s/d. p. 11. Tradução livre.). Ou seja, conforme era para os gregos, os diagramas eram as proposições.

Isso nos leva novamente a questionar se o meio de os alunos investigarem um diagrama, fazerem conjecturas e interrogarem as situações para analisá-las, já não lhes dariam recursos para compreender matemática? Embora, como diz o sujeito (2) a passagem não seja uma mágica, ou, como diz o sujeito (4), há, entre as duas formas de linguagem, verdadeiros "saltos mortais", o ganho no trabalho com a exploração dos diagramas em sala de aula pode ser grande. Se, na produção do próprio matemático, eles são auxiliares, para o aluno, eles podem ser recursos imprescindíveis. O modo de comunicação dos diagramas pode favorecer o espírito investigativo e, mesmo que, como dissemos anteriormente, as primeiras demonstrações sejam ensaios imprecisos, a tentativa pode impulsioná-los a falar e escrever matemática permitindo ao professor, em sala de aula, conhecer o modo como o aluno está lidando com o conhecimento matemático.

Como nos diz o sujeito (2)

2.5. você produziu uma figura no computador /.../ e você tem que tirar o que você puder daquela figura; então, fazer as perguntas, conseguir responder /.../ o que a gente retrata aí é a busca do significado daquele diagrama para o aluno. É a interpretação, o que ele pode tirar, é a leitura dele. Porque é mais do que simplesmente enxergar, é fazer sentido.

Este é, para o professor, em nosso entender, um momento importante onde ele poderá ter acesso à linguagem falada do aluno, às concepções e aos conhecimentos matemáticos prévios que lhe permitem investigar a figura. Expõe-se, nessa fala, o conjunto de relações de signos que estão, para ele, estabelecidos, e as significações que estão disponíveis para o sujeito. No movimento de sua análise, a linguagem falada vai cedendo lugar à linguagem falante. As interpretações vão ganhando espaço e as significações novas vão surgindo. Um novo instrumental matemático passa a estar disponível. Esse é o movimento de compreensão que se espera ver no aluno. A forma final da sua escrita será uma conseqüência do seu modo de pensar e interpretar a matemática. Será visão da unidade do que é percebido que lhe garante a expressão.

Merleau-Ponty nos diz, comparando duas línguas, o francês e o latim, que, se consideramos a existência de uma linguagem que comunica,

> quando se vai do latim ao francês, mesmo se não há fronteira que *se atravesse*, há um momento em que a fronteira é inquestionavelmente atravessada. E a

[48] La matemática no desarrolló un lenguaje simbólico adecuado para expresar ideas generales, las demostraciones sin palabras eran las demostraciones.

> comparação das línguas, a avaliação objetiva de seu poder de expressão permanece possível, embora cada uma, já que foi falada, tenha *até certo ponto,* satisfeito à necessidade de expressão. Ainda que nenhuma expressão jamais seja expressão absoluta – ou melhor, por essa razão mesma -, há palavras que dizem de um jeito, outras que dizem de outro, há umas que dizem mais e outras que dizem menos. (Merleau-Ponty, 2002a, p. 63).

Talvez, os diagramas e as demonstrações simbólicas sejam, para os nossos alunos, essas duas línguas descritas por Merleau-Ponty e, cada uma delas comunica ao seu modo permitindo que *a travessia da fronteira* seja feita pelo aluno. Talvez, também, por isso não seja uma mágica, mas é uma travessia que, mesmo que acompanhado de uma multidão, o sujeito faz sozinho.

Resta-nos apenas cuidar para que a travessia seja possível. Ao professor cabe oferecer condições de segurança para que o aluno se aventure na travessia. Resta a certeza de que, quando lidamos com a linguagem matemática, precisamos ver, como em qualquer outra, que seus signos sozinhos nada significam, "que eles só passam a ter significação por sua combinatória, e que, enfim, a comunicação vai do todo da linguagem falada ao todo da linguagem ouvida. Falar é, a cada momento, detalhar uma comunicação cujo princípio já está estabelecido". (idem, p. 65).

Essa "combinatória" não é, porém, uma redução. Como diz o sujeito (4),

4.3. "existe um certo conjunto de relações entre os entes geométricos, em que a mediação dos números é extremamente fértil. Mas reduzir tudo precocemente a relações entre números é perder a riqueza da própria geometria, porque eu acho que você muda de campo cognitivo, você tenta reduzir um campo a outro e isso já é uma perda, se afasta da maturação, da expansão, do desenvolvimento daquele campo propriamente geométrico. /.../ tudo se traduz em números e aí /.../ determinadas capacidades de apreensão, de perceber que existe um outro campo, /.../ ficam atrofiadas".

Para não “perder a riqueza” do que, na matemática, pode se mostrar ao sujeito, as combinações de linguagens pode ser uma opção.

Ou seja, ao nomearmos a categoria da linguagem, pensamos no dizer que *pro-põe* de que nos fala Heidegger. Ao analisá-la, ouvimos, nos dizeres dos sujeitos, relatos de situações que nos remeteram à linguagem falada e falante de Merleau-Ponty. Percebemos a importância dessa valorização no trabalho de sala de aula, onde o dizer do aluno é um *pro-por* do que para ele faz sentido. A categoria da linguagem nos envia para um pensar mais voltado às idéias da comunicação e da expressão e nos permite compreender que, tanto na sala de aula, como na produção matemática, há modos diferentes de o sujeito perceber as relações e, portanto, tem que haver modos diferentes de ele poder comunicar o percebido, compreendido e interpretado na sua vivência nas situações matemáticas. Nos dizeres de Saraiva é preciso que se

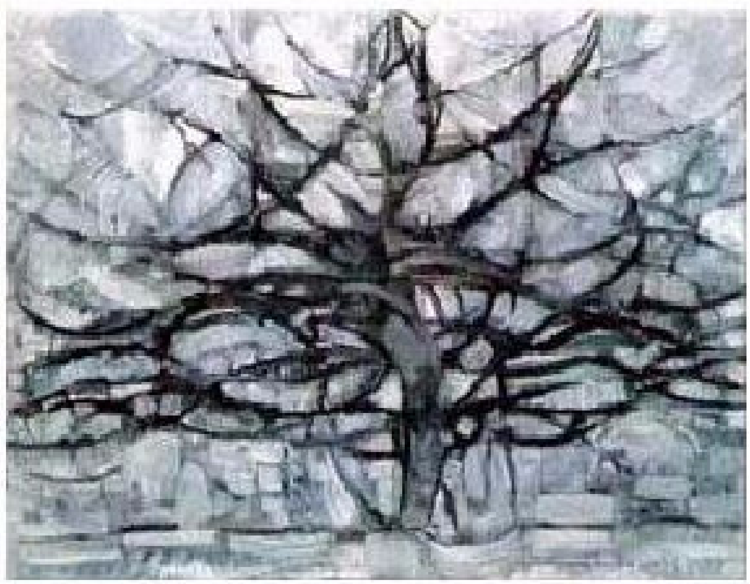
> “devolvam ao raciocínio visual um estatuto de acordo com a sua importância de modo que seja conseguido o equilíbrio desejado: o da integração dos pensamentos visual, verbal e algébrico”. (Saraiva, 1992, p. 05).

Finalizamos a análise desta categoria abrindo possibilidades outras de compreensão da expressão matemática ou insinuando que se

> não se pode conceber uma expressão definitiva /.../ pois assim que a fala se apropria dela, assim que esta se torna *viva*, a língua /.../ torna-se irregular e enche-se de exceções. /.../ As línguas são ávidas de mudanças. /.../ É preciso que haja um fundo não-tético da língua em seu estado imediatamente anterior, que acaso e razão se unam”. (Merleau-Ponty, 2002a, p 58).

É preciso que o *falar* seja um momento tão importante quanto o *ouvir*. Este é o desafio da tarefa de *ensinar matemática*.

Capitulo VI. Considerações finais



Mondrian - Árvore Cinza

… diante de numerosas árvores, não vemos a floresta. /…/ em relação às árvores singulares e à sua aglomeração, a floresta é algo diverso. Por conseguinte, ela não é apenas o que acrescentamos conceitualmente e de maneira arbitrária à soma das árvores supostamente dada sozinha: ela não é apenas quantitativamente mais do que uma aglomeração de muitas árvores. Este algo diverso … é aquilo a partir do que as muitas árvores se mostram como pertencentes a uma floresta” (Martin Heidegger, 2003).

Capitulo VI. Considerações finais

6.1. Uma Síntese de Transição: esboçando o início da finalização.

Entendemos que a análise dos dados da pesquisa, a interpretação das Categorias Abertas que construímos, é um momento importante na pesquisa. Ele abre para o significado fenomenológico do que é investigado: *os diagramas no ensino e na produção de matemática*. As Categorias Abertas iluminam a região de inquérito na qual a interrogação se situa e possibilitam, ao pesquisador, ações comprometidas, para que a meta-compreensão[49] seja possível à medida que nos envolvemos tanto com a prática pedagógica quanto com a prática da produção matemática. Ouvimos os autores com os quais dialogamos e os sujeitos entrevistados que se puseram a pensar sobre os diagramas e, na análise das Categorias, pensamos sobre esse pensar.

Buscamos, agora, construir uma *Síntese de Transição, uma síntese do compreendido e interpretado, expondo nossa meta-compreensão acerca dos significados epistemológicos dos diagramas no ensino e na produção do conhecimento matemático.* Procuraremos articular nosso discurso para "*libertar"* o sentido do que foi compreendido e interpretado no movimento da pesquisa. Essa *libertação* vai se tornando possível, segundo nosso entender, à medida que o nosso discurso vai tomando posse da teoria que situou o início do nosso trabalho, que vai se pautando no ouvir atento das falas dos sujeitos entrevistados e no pensar, do investigador, que vai tomando corpo e se articulando.

O sentido intuído que dirige todo o caminhar do pesquisador é o que vai se iluminando e nos tornando, cada vez mais, atentos à experiência vivida. Não somos capazes de apresentar uma conclusão, pois o caminho vai se construindo

[49]Estamos usando aqui o termo *meta-compreensão* tal qual Husserl o utiliza como *cogito, cogitatum*, ou seja, *pensar o pensado*.

na caminhada e sempre há o que caminhar. Por isso, o que pretendemos, neste final de redação, é expor a síntese (transitória) do compreendido. Um modo de, valendo-nos da linguagem, procurar fazer com ela seja expressão.

6.2. Analisando a significação do tema investigado

Interrogando *o significado epistemológico dos diagramas no ensino de matemática e na produção do conhecimento matemático*, a natureza do perguntar pelo que investigamos exigiu-nos, de início, olhar em duas direções:

- uma, que aponta para o modo como os diagramas são significativos para o matemático na sua produção de conhecimento,

- outra, que aponta para o modo como os diagramas são significativos para o ensino de matemática.

Em ambas direções, a literatura nos aponta modos de os diagramas significarem. Investigando diferentes épocas e culturas, vemos como os diagramas são tidos desde simples recursos visuais até fontes de inspiração e recurso matemático.

Mas o que, afinal, intencionamos nesta investigação?

Nossa intenção se dirige para compreender a forma como o matemático lida com a produção matemática e qual o recurso visual que utiliza. A partir disso, intencionamos visualizar modos possíveis de trabalharmos pedagogicamente com a produção matemática.

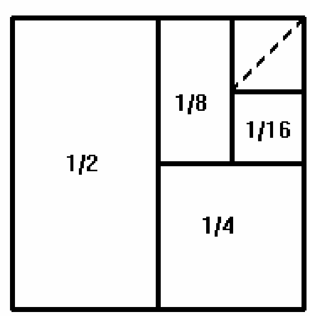
O foco na sala de aula tem origem na experiência vivida como professora de geometria no curso de Licenciatura em Matemática. Até o início da investigação, as leituras que tínhamos sobre o tema variavam entre as que defendiam entusiasticamente o uso de imagens para a compreensão geométrica do aluno até os que declaravam que o professor, ao usar recursos intuitivos, não conduzia seus alunos ao raciocínio argumentativo e, dificilmente, os capacitariam a desenvolver ou mesmo acompanhar uma demonstração formal construída para um teorema da matemática. Alguns autores argumentam que, ao serem usados diagramas, o professor leva seus alunos a um tipo de crença que pode se transformar em convicção absoluta e fazê-los compreender que esse tipo de verificação não é uma prova, torna-se uma tarefa extremamente difícil. Esse era um argumento que nos emudecia. Sentimos o ímpeto de nos lançarmos a outras leituras e intencionamos a investigação.

Os primeiros contatos com as "*demonstrações visuais*" ou *"demonstrações sem palavras*" a que tivemos acesso na leitura de Brown (1999) nos fazia muito sentido. Um filósofo da matemática nos trazia exemplos que ele dizia terem papel crucial no processo de inferência. Isso despertou nossa curiosidade e interesse e fez com que buscássemos compreender melhor do que se falava ao mencionar tais demonstrações.

Para nos situarmos nessa argumentação, vamos considerar um de seus exemplos. Brown apresenta o teorema[50], sua prova usando uma figura e a prova tradicional para que possamos fazer o contraste.

Teorema: Seja a série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+ \ldots \frac{1}{2^n}$. Mostre que a sua soma é 1.

Prova:



Na seqüência, o autor nos diz que "para o contraste, aqui está uma prova padrão usando a técnica do $\varepsilon - \delta$". E segue:

Prova (tradicional): primeiro nós notamos que uma série infinita converge para a soma S se a seqüência de somas parciais (S_n) converge para S. Neste caso, a seqüência da soma parcial é:

[50] Fazemos, aqui, uma adaptação do texto original que está em inglês e pode ser encontrado em Brown (1999, p. 35-6).

$$s_1 = \frac{1}{2}$$
$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

Organizando uma seqüência com os valores das somas parciais, teremos:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Esta seqüência é infinita e tem limite 1, contanto que para um número ε > 0, suficientemente pequeno, haja um número N(ε), tal que se n > N, a diferença entre o termo geral da seqüência $\frac{2^n - 1}{2^n}$ e 1 é menor que ε. Simbolicamente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 \, se \, \forall \varepsilon, \exists N, n > N \to \left| \frac{2^n - 1}{2^n} - 1 \right| < \varepsilon$$

Resumindo, temos o que segue:

$$\left| \frac{2^n - 1}{2^n} - 1 \right| < \varepsilon \leftrightarrow \left| \frac{-1}{2^n} \right| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\leftrightarrow \log_2 \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Então nós podemos ter: $N(\varepsilon) = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

$donde, \; n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \to \left| \frac{2^n - 1}{2^n} - 1 \right| < \varepsilon$ E provamos que a soma da série é 1.

Posteriormente, em Nelsen[51] (1993), encontramos uma série de outros exemplos dessa natureza sob o título de "P*roof without word*" e, com Soro (s/d) pudemos ver que, embora esse tipo de demonstração já fosse de conhecimento dos pitagóricos, gregos e hindus, a partir dos últimos 30 anos, re-aparece a atenção dada ao tema.

Por qual motivo esse tema volta a ser intencionado? Se concordarmos com o matemático francês Jean Dieudonné que, em 1964, no prólogo do seu livro "*Alegra Linear e Geometria Elementar*", escreve que era preciso libertar os alunos, o quanto antes, da "camisa de força das figuras" para que eles pudessem construir seu raciocínio dedutivo sem apoio da intuição, não temos uma resposta adequada para esta questão.

Porém, se ouvirmos de Poincaré que o aspecto visual é importante mesmo que seja pelo simples fato de estimular o jovem a pensar por si mesmo e passar a gostar de matemática, já que o raciocínio com inspiração na imagem visual pode ser uma tarefa estimulante, despertamos para outra idéia. Poincaré ainda nos leva a pensar que o recurso visual é importante não só para o aluno, mas também para o professor, já que ele pode favorecer-lhe um re-viver ou re-lembrar seus esquemas interiorizados e construídos logicamente.

Freudenthal (1973) afirma que a intuição geométrica ou o aspecto visual é importante na produção do conhecimento matemático e pode precaver-nos contra os "desvios" realizados nas soluções de problemas que são conduzidas considerando apenas os enunciados. As figuras, segundo esse autor, iluminam as idéias e sugerem métodos (caminhos, opções) para que se construa uma validação das hipóteses e conjecturas exploradas. Saraiva afirma que "as ilustrações ajudam os alunos a organizar informações e /.../ contribuem pra o sucesso da resolução dos problemas" (Saraiva, 1992, p. 04).

Aqui está, para nós, a relevância da investigação que nos dispusemos a fazer. Tanto na literatura quanto nas falas dos nossos sujeitos pudemos ver que os diagramas favorecem um tipo de pensamento que leva o aluno a lidar com situações matemática, questionando-as e comunicando suas compreensões.

[51] Inclusive esta soma ele apresenta com o mesmo desenho de Brown no capítulo "*Sequences & Series*"", sob o título de "*Geometric Sums*", p. 118.

A investigação do diagrama, seja ele construído com régua e compasso ou com o recurso do computador, pode favorecer o estabelecimento de relações, o levantamento de hipóteses e a busca de propriedades que favoreçam a generalização.

Um dos nossos sujeitos cita como exemplo as construções dos teoremas do Cálculo Diferencial e Integral. Diz que o recurso da informática leva o sujeito a investigar, na tela do computador, o comportamento de funções, as idéias de limites, derivadas e integrais. Ao olhar para o diagrama, mesmo que ele retrate uma situação particular, um exemplo, o diagrama pode possibilitar a construção da idéia geral a medida que o olhar seja investigativo e inquiridor.

As construções da geometria, com os softwares de geometria dinâmica, também ganham a possibilidade de transformação. O argumento de que as figuras são elementos estáticos que não sugerem idéias ou não favorecem a investigação é derrubado se analisamos a possibilidade dos softwares gráficos.

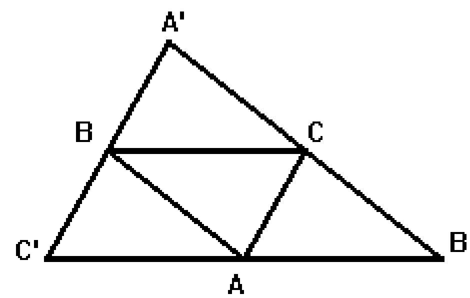
> "Cada vez mais o "software" permite que o utilizador manipule objetos no "écran" envolvendo idéias matemáticas como objetos geométricos (gráficos e curvas), ícones referentes a objetos matemáticos como grupos, transformações e fórmulas que, até então, só poderiam ser utilizados através da matemática formal" (idem, p. 05).

Duval (1995) nos fala, ainda, da importância da investigação de figuras. Para esse autor, as figuras não são elementares. Mesmo que seja uma figura de duas dimensões, ela comporta uma série de "*unidades figurais*[52]" nas quais podem ser decompostas para serem compreendidas e analisadas. Segundo esse autor um mesmo objeto matemático pode ser representado por *unidades figurais* diferentes.

Consideremos um de seus exemplos para analisarmos o que ele diz:

[52] Duval nos diz que toda figura possui elementos constitutivos de dois tipos: dimensionais e qualitativos. Os dimensionais referem-se ao número de dimensões da figura e os qualitativos as variações de formas, cores,

Seja A'B'C' um triângulo qualquer, :
Sabe-se que A'C' e AC são paralelas,
A'B' e AB são paralelas,
B'C' e BC são paralelas.
Prove que A é ponto médio de B'C'



Esta figura pode ser espontaneamente vista como um pequeno triângulo inscrito num grande triângulo ou como uma pavimentação de pequenos triângulos disjuntos. No entanto, para encontrar três paralelogramos, precisamos fazer uma reorganização em nosso modo de perceber a figura que faz predominar o contorno dos triângulos sobre os dos quadriláteros. E por que ver o paralelogramo? Ver o paralelogramo pode ser um indicativo para o início do que é requerido. "Isso não seria já sugerido pelo enunciado?" questiona o autor. E ele mesmo responde: "provavelmente sim, se o leitor for um matemático[53]". Porém essa leitura exige uma combinação de dois registros: um olhar para a figura – que ele denomina de "*registro figural*" - e a articulação com o que sugere o enunciado – "*registro discursivo*".

Duval afirma que essa coordenação entre o registro figural e discursivo não existe para a maioria dos alunos em situações de aprendizagem já que envolve uma "*função de tratamento*" ou seja, é uma situação que exige uma transformação de uma situação de comunicação imediata, espontânea (a imagem da figura) em outra (a linguagem do texto).

Assim, ao finalizarmos nossa pesquisa, podemos dizer que os diagramas são significativos em muitos aspectos. Alguns deles tentamos destacar nas análises das Categorias Abertas. Outros são perspectivas abertas que merecem ainda mais estudo e, como estamos no movimento da Síntese de Transição, não esgotamos as possibilidades do tema. Apenas entendemos que ele é de

---

orientação, etc. que influenciam a tarefa visual ou o modo como as figuras são percebidas. As unidades figurais são esses elementos constitutivos das figuras.

[53](adaptação do trecho seguinte) : Naturellement on peut estimer que la seule lecture de l'énoncé devrait conduire à penser à la fois au mot et à l'objet « parallélogramme », ce qui est la condition pour regarder la figure de façon utile. Cela est évident pour un mathématicien. (Duval, 1995, p. 183).

relevância para a Educação Matemática pois põe em foco o *pensar, a linguagem e a produção do conhecimento matemático.* Aventuramo-nos a dizer que, segundo o que pudemos compreender em nossa investigação, os diagramas são mais do que simples recursos visuais ou representações. Eles são estímulos ao fazer matemática. Eles podem conduzir à abertura para a compreensão e produção da Matemática. Podem agir como liberadores da disponibilidade para a compreensão e interpretação de conceitos, provas e teorias matemáticas.

Os diagramas são expressões da linguagem. Logo, estão no movimento de organização dos dados e na comunicação do intuído na evidência. Em sua maioria, os diagramas não são de leitura óbvia e evidente e, portanto, requerem análise e interpretação. Na leitura do diagrama encontra-se a abertura para as possibilidades de aprender e produzir Matemática.

Os diagramas podem ser vistos de múltiplas maneiras e a comunicação do percebido pode tanto ampliar o repertório matemático do aluno quanto dar ao professor um modo de conhecer os recursos matemáticos de seus alunos. Ou seja, a exploração visual pode ser elemento de *avaliação* dos conhecimentos prévios e a construção de um diagrama, pelo aluno em situações de aprendizagem, pode expor o conhecimento matemático que ele já construiu. Olhar o modo como o diagrama pode ser visto como *elemento de avaliação do que foi compreendido* em situações de aprendizagem é uma das aberturas possibilitadas por esta investigação.

Já no que diz respeito à construção do conhecimento matemático pelo matemático, nossa pesquisa indica que os diagramas são elementos que favorecem o insight, possibilitam deduzir informações, levantar hipóteses, fazer conjecturas, analisar e testar raciocínios. Auxiliam e estão presentes no processo de construção do conhecimento matemático. Os diagramas são registros próprios da atividade matemática. Eles organizam a percepção visual e a prática do discurso teórico. Eles estão presentes na construção do pensar.

6.3. Aceitando um desafio: construindo um diagrama que expresse a compreensão

> A filosofia não é a passagem de um mundo confuso a um universo de significações fechadas. Ao contrário, ela começa com a consciência daquilo que corrói e faz ruir, mas também renova e sublima nossas significações adquiridas. (Merleau-Ponty, 2002).

Nossas significações adquiridas foram sendo ampliadas pelos caminhos abertos em nossa pesquisa. A interrogação que motivou o questionamento e nos fez olhar para os diagramas de modo atento nos faz, neste momento de análise, questionar o que na pesquisa foi compreendido. O movimento da investigação, quer seja quando nos envolvemos no diálogo com os autores aos quais recorremos, quer seja quando procuramos ouvir o dizer dos sujeitos que entrevistamos, nos levou por caminhos que foram se abrindo a medida que cada um dos passos era dado. A trilha foi sendo aberta e lançando luz à caminhada. Organizamos, inicialmente, os quadros com as Unidades de Significado, buscamos as convergências das falas dos sujeitos, vimos nascer as Categorias Abertas no movimento de interpretação. Essa Interpretação do que os sujeitos dizem do significado dos diagramas, nos permitiu voltar à literatura e ver intersecções múltiplas. A via histórica e filosófica nos mostrou o modo como os diagramas foram considerados no fluxo do tempo e da cultura, e os sujeitos nos fizeram ver o modo como, ainda hoje, os diagramas são significativos na produção matemática tanto do profissional quanto do aluno. O modo como a compreensão foi se expondo nos faz ver a possibilidade de aceitar o desafio proposto no Exame de Qualificação deste trabalho: seria possível construir um diagrama que trouxesse o modo como o pesquisador vê o significado dos diagramas se expondo na pesquisa?

Se o diagrama puder ser um modo de expressar a experiência vivida na análise dos dados da pesquisa, no movimento de compreensão do tema investigado, a resposta é afirmativa. O entrelaçar-se das Unidades de Significados identificadas nas falas dos sujeitos, o modo como elas nos remeteram às idéias gerais e a forma como essas idéias se conectam e se relacionam, nos permite ver uma *rede de significações*. Rede de Significações que Bicudo nos traz como a experiência vivida que "ao ser expressa /.../ pode se constituir parte da rede, deixa a marca do sentido percebido pela pessoa e, ao mesmo tempo, a marca da história e da cultura por meio de sistemas constituídos de expressão". (Bicudo, 2000, p. 98).

Fizemos recortes de expressões convergentes retiradas das falas dos sujeitos que, em nosso movimento de interpretação, tornam-se núcleos significativos e, embora se mantendo ligadas à originalidade do dizer do sujeito, conduzem-nos à normatividade das falas.

6.3.1. A Rede de Significações construída

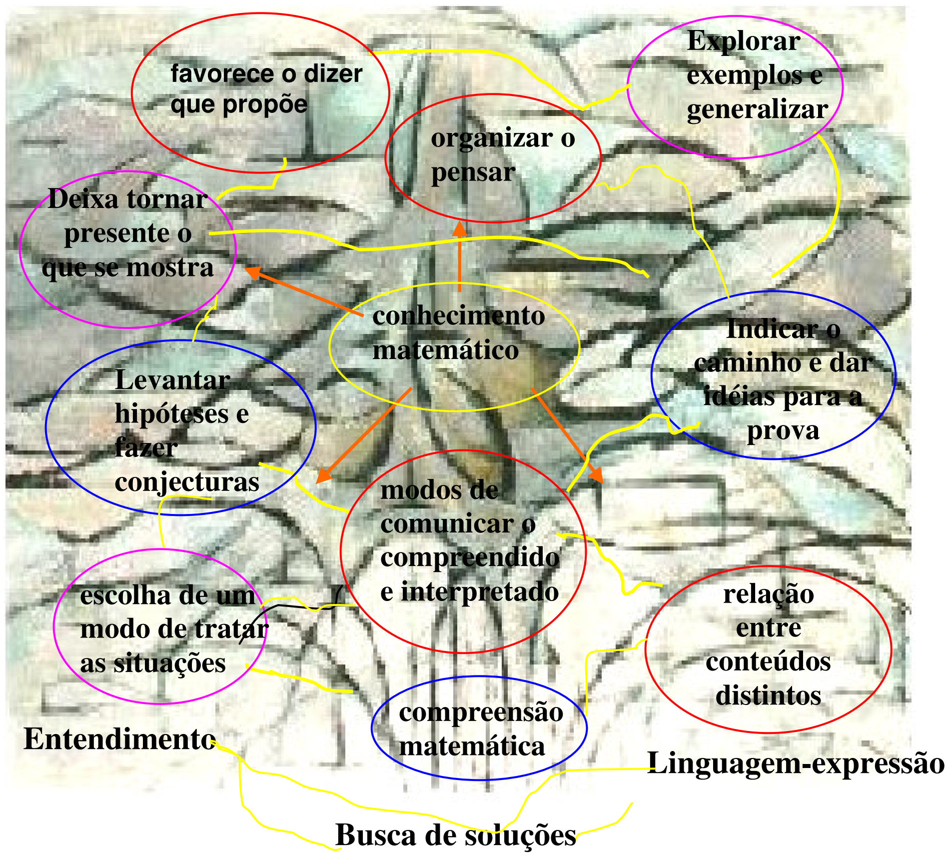


Imagem : Piet Mondrian Macieira

6.3.2. Expondo o sentido que o diagrama tem para o pesquisador

À base do nosso diagrama está a "*compreensão matemática*", que é favorecida pela análise de conjecturas, levantamento de hipóteses e pelo estabelecimento de relação entre os diferentes conteúdos matemáticos. Esse movimento de investigação da realidade matemática é fundamental para que a organização do conhecimento matemático vá se constituindo. Ao buscar comunicar o que, na intuição primeira, foi percebido e está sendo interpretado, procuram-se modos distintos de expressão. Investigando o diagrama, podemos considerar exemplos particulares e fazer uma *variação* nos modos de percebê-lo e interrogá-lo que nos leve à generalização. Nesse caminho, os diagramas favorecem a construção das provas rigorosas pela análise da situação e busca de uma escrita formal que comunique o compreendido e interpretado. Entre a exploração de situações, via diagrama, e a construção da prova, o caminho não é linear, mas os diagramas podem lançar luz ao modo como ele será aberto. Esse movimento, que se constitui de um ir e vir constante por entre todos os caminhos possíveis, vai abrindo a possibilidade da *produção do conhecimento matemático.*

Para expor o modo como vimos o *nascer* desse diagrama, a escrita torna-se linear e não expressa o movimento que se deu na trama de considerações. O percebido, compreendido e interpretado, na investigação, está além do que conseguimos expor.

Merleau-Ponty nos diz que há uma transcendência da significação em relação à linguagem, já que a significação é da ordem do percebido e, como tal, está sempre aberta a novas perspectivas e interpretações. Desse modo, a expressão jamais é absolutamente expressão, o exprimido jamais é completamente exprimido; à linguagem é essencial que a lógica de sua construção jamais seja das que se pode colocar em conceitos, e à verdade, que jamais seja possuída, mas apenas transpareça através da lógica confusa de um sistema de expressão que traz os vestígios de um outro passado e os germes de um outro futuro. (Merleau-Ponty, 2002a, p. 60).

Isso, no entanto, não invalida a expressão, pois é ela mesma que me permite entrar em outros sistemas de comunicação e habitá-lo.

Buscamos, talvez para encontrar um outro sistema que fale do sentido percebido no caminho da pesquisa, construir o diagrama sobre uma das imagens de *Piet Mondrian,* artista que procura, em sua obra, levar-nos a uma interpretação do que pode ser visto além e aquém do que é mostrado na pintura. É assim que enfrentamos o desafio: construímos um modo de expressão que pode se abrir à interpretação de quem deseja ler, de quem procura ver, sob as folhas, a *árvore enraizada na terra, florescendo e dando frutos.*

A verdade insere-se na obra. A verdade advém como o *combate entre clareira e ocultação*, na reciprocidade adversa entre mundo e terra. A verdade quer introduzir-se na obra, como combate entre mundo e terra. O combate não deve suprimir-se num ente produzido expressamente para esse efeito; também não deve simplesmente alojar-se nele, deve sim ser aberto justamente a partir dele. Este ente deve, por isso, ter em si, os traços essenciais do combate. No combate, conquista-se a unidade entre mundo e terra. Na media em que se abre um mundo, põe-se em decisão para uma humanidade histórica a vitória e a derrota, a bênção e a maldição, a dominação e a servidão. (Heidegger, 1977).

CALEIDOSCÓPIO

Acontece: um
giro
e a forma brilha.

Espelhos do instante
filtram
a ordem pura; cores, forma,
brilho
(e sem nenhuma
palavra).

Acontece: outro
giro
outra forma e o mesmo
brilho.

Ó espelho dos instantes
fragmentos
estruturados em reflexos
fúlgidos!

Acontece: novo
giro...
O caleidoscópio quebra-se. (FONTELA, 1988:89)

A pintura de Mondrian não abriga um ponto central e sua superfície se repete por meio das linhas que compõem os galhos, dando-nos, assim, uma paisagem vertiginosa, uma vez que o olhar "caminha" de uma direção à outra, procurando por algo que não seja tão desolador quanto o que tem a frente
Alexandre Rodrigues da Costa(UFMG)

B I B L I O G R A F I A

Arsac, Gilbert. *L'Origine de la demonstration: essai d'epistémologie didactique.* Recherches en didactique des mathématiques. Vol 08, 1987.

Bicudo, Irineu. *O primeiro livro dos Elementos de Euclides*. Natal: Editora SBHMat, 2001.

Bicudo, Maria A. Viggiani & **Espósito**, Vitória Helena Cunha Espósito. (org.). *Joel Martins ... um seminário avançado em fenomenologia*. São Paulo: EDUC, 1997.

Bicudo, Maria A. Viggiani & **Cappeletti**, Isabel Franchi. (orgs.). *Fenomenologia: uma visão abrangente da Educação.* São Paulo: Olho d'Água, 1999.

Bicudo, Maria A. Viggiani. *Fenomenologia: confrontos e Avanços*. São Paulo: Cortez, 2000.

Borba, Marcelo D. & **Villarreal**, Mônica E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. Information and Communication. Technologies, Modeling, Experimentation an Visualization*. New York: Springer, 2005.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1997.

Brown, James Robert. *Philosophy of mathematics: an introduction to the word of proofs and pictures*. New York: Rotledge, 1999.

Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 3ª edição. Lisboa: Gradiva, 2000.

Costa, Newton C. A. da. *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. Terceira Edição. São Paulo: Editora Hucitec, 1992.

Crozet, Pascal. *Editer lês figures dês manuscrits árabes dês géométrie: l'exemple d'al Sijzi.* In: Minutes of the Workshop on "The Problem of Diagrams and Drawings Criticism in Mathematical Texts". BRICKS, 2005, p. 33-42.

Duval, Raymond. Sémiosis et *Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Paris: Peter Lang S/A, 1995.

Eves, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

Fainguelernt, Estela Kaufman. *Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Ferreira, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo dicionário da Língua Portuguesa*. 3ª edição. São Paulo: Positivo Livros, 2004.

Freudenthal, Hans. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

Garnica, Antonio V. M. *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática*. Rio Claro, 1995. Tese (Doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista.

Garnica, Antonio V. M. *Educação, Matemática, Paradigmas, Prova Rigorosa e Formação do Professor*. In: Bicudo, Maria A. Viggiani & Cappeletti, Isabel Franchi. (Orgs.). Fenomenologia: uma visão abrangente da Educação. São Paulo: Olho d'Água, 1999. p. 105-155.

Gaspar, Maria Terezinha Jesus. *Aspectos do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico em Algumas Civilizações e Povos e a Formação de Professores*. Rio Claro, 2003. Tese (Doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista.

Ghione, F. *Diagrams in Menelau's Theorem*. In: Minutes of the Workshop on "The Problem of Diagrams and Drawings Criticism in Mathematical Texts". BRICKS, 2005. p. 52-59.

Giaquinto, M. *Epistemology of Visual thinking in Elementary Real Analysis.* British Journal for the Philosophy of Science. Vol. 45. Nº 03, 1994.

Giorgi, Amedeo. *Sketch of a Psychological Phenomenological Method. In: Phenoenology and Psychoogical* Research. Pittsburgh: Duquesne University Press, 1985.

Gonçalves. Carlos Henrique Barbosa. *Os Livros Aritméticos de Euclides*. Rio Claro, 1997. Tese (Doutorado). Instituto de Geociencias e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista.

Guzmán, Miguel de. El *Rincón de la Pizarra: ensayos de Visualización en Análisis Matemáticas*. Madrid: Ediciones Pirámide, 1996.

Hadamard, Jacques. *The Mathematician's Mind: the psychology of invention in the Mathematical field*. Princeton: Princeton University Press, 1996.

Heidegger, Martin. *A Origem da Obra de Arte*. Título Original: *Der Ursprung des Kunstwerks.* Trad. Maria da Conceição Costa. Lisboa: Edições 70, 1977.

Heidegger, Martin. *Ser e Tempo.Vol I e II.* Trad. Márcia de Sá Cavalcante. Petrópolis: Vozes, 1995.

Heidegger, Martin. *Caminhos de Floresta*. Título Original: *Holzwege*. Trad. Irene Borges Duarte. Lisboa: Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1998.

Heidegger, Martin. *Seminários de Zollikon*. Editador por Medard Boss. Título Original: *Zollikoner Seminare: Protokolle – Zwiegespräche - Briefe*. Trad. Gabriela Arnhold e Maria de Fátima de Almeida Prado. Petrópolis: Vozes, 2001.

Heidegger, Martin. *Ensaios e Conferências*. Título Original: *Vorträge um Ausfsätze*. Trad. Emanuel Carneiro Leão. Gilvan Fogel. Márcia de Sá Cavalcante. Petrópolois: Vozes, 2002.

Heidegger, Martin. *Os Conceitos Fundamentais da Metafísica: mundo, finitude e solidão.* Título Original: *Die Grundbegriffe der Metaphysik: Welt, Endichik, Einsamkeit.* Trad. Marco Antonio Casanova. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2003.

Heidegger, Martin. *Serenidade*. Título Original: *Gelassenheit*. Trad. Maria Madalena Andrade e Olga Santos. Lisboa: Instituto Piaget, s/d.

Hersh, Reuben. *What is Mathematics, really?* New York: Oxford University Press,1999.

Hogben, Lancelot. *Maravilhas da Matemática: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos*. Rio de Janeiro: Livraria do Globo, 1946.

Hutchins, Robert Maynard (Editor Chief). Great Books of the Western World. Volume II. Chicago: Encyclopedia Britannica, 1952.

Kaleff, Ana Maria Martensen Roland. *Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)possibilidades de (trans)formação dos conhecimentos geométricos do professor de matemática*. Niterói, Rio de Janeiro, 2004. Tese (Doutorado).

Centro de Estudos Sociais Aplicados. Faculdade de Educação. Universidade Federal Fluminense.

Kant, Immanuel. *Crítica da Razão Pura e outros textos filosóficos.* São Paulo: Abril Cultural, 1974.

Keller, Agathe. *Making diagrams speak, in Bhaskara I's comentary on the Aryabhatiya*. História da Matemática. Nº 32, 2005. p. 275-302. disponível em www.sciencedirect.com

Lalande, André. *Vocabulário técnico e crítico da filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

Lindquist, Mary Montgomery & Shulte, Alberto P. (org.). *Aprendendo e Ensinando Geometria.* São Paulo: Atual, 1994.

Lima, Luiz Augusto Normanha. *O que é ser educador na Universidade?* Tese (Doutorado). São Paulo, 1995. Programa de Psicologia da Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Machado, Ozeneide Venâncio de Mello. Pesquisa *Qualitativa: Modalidade Fenômeno Situado.* In Bicudo, Maria Aparecida Viggiani & Espósito, Vitória Helena Cunha Espósito. *Pesquisa Qualitativa em Educação*. São Paulo: Editora da UNIMEP, 1994.

Martins, Joel & **Bicudo**, Maria Aparecida Viggiani. *A pesquisa Qualitativa em Psicologia: fundamentos e recursos básicos*. São Paulo: Editora Moraes, 1989.

Merleau-Ponty, M. *O visível e o invisível*. Título Original: *Le Visible e l'Invisible*. Trad. José Artur Gianotti e Armando Mora de Oliveira. São Paulo: Editora Perspectiva S.A., 1992.

Merleau-Ponty, M. *Fenomenologia da Percepção*. Título Original: *Phénoménologie de la Perception.* Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

Merleau-Ponty. *Palestras*. Título Original: Causeries. Trad. Artur Morão. Lisboa: Edições 70, 2002.

Merleau-Ponty. *A Prosa do Mundo*. Título original: *La Prose du Monde*. Trad. Paulo Neves. São Paulo: Cosac & Naify, 2002 a.

Nelsen, R. B. *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington: The Mathematical Association of América, 1993.

Netz, Reviel. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: a study in cognitive history*. Cambridge University Press, 1999.

Poincaré, Henri. *O valor da Ciência*. Título Original: *La valeur de la science*.Trad. de Maria Helena Franco Martins. 2ª edição. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2002.

Poincaré, Henri. *A Ciência e a Hipótese*. Título Original: *La Science e l'Hypothèse*. Trad. de Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora da Unversidade de Brasilia, 1985.

Russel, Bertrand. *História do Pensamento: a Aventura das Idéias dos Pré-Socráticos a Wittgenstein*. Ocidental. Trad. Laura Alves e Aurélio Rebello. 5ª edição. Rio de Janeiro: Ediouro, 2001.

Saraiva, Manuel Joaquim Félix da Silva. *Raciocínio Visual: parente pobre do raciocínio matemática?* In: Revista Educação e Matemática. Nº 21. 1992. p. 3-5.

Svensson, Lennart. *Three Approaches to Descriptive Research*. In: Qualitative Research in Psychology. Pittsburgh: Duquesne University Press, 1986.

Soro, Roberto Doniez. *El Secreto Ruido de Las Demostraciones Sin Palabras*. Agua Santa: Universidad de Viña del Mar. s/d.

Szabo, A. *Les débus des mathématiques grecques*. Paris: Vrim, 1977.

ANEXOS

TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso pretende esclarecer os procedimentos que envolvem a pesquisa, e a utilização dos dados nela contidos. Tem o objetivo de deixar o mais transparente possível a relação entre os envolvidos e o tratamento e uso das informações que serão coletadas.

Os dados oriundos das entrevistas realizadas servirão como material para a busca da compreensão do processo de produção do conhecimento matemático e a comunicação de idéias matemáticas em sala de aula, e serão utilizados na redação da tese de doutoramento da aluna Rosa Monteiro Paulo, desenvolvida junto ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", em Rio Claro, São Paulo.

O acesso aos registros gravados será exclusivo da aluna pesquisadora e de sua orientadora, Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, que assumem o compromisso de não divulgá-los.

Os registros escritos, oriundos das gravações, serão feitos preservando-se a identidade dos sujeitos, que assim o desejarem, em sigilo absoluto. Para o tratamento dos dados, na redação final do trabalho, serão utilizados pseudônimos tais como Sujeito A, Sujeito B, etc. As informações provenientes da análise dos dados coletados nas entrevistas poderão ser utilizadas pelos pesquisadores; aluna e orientadora; em publicações e eventos científicos que tenham por objetivo a divulgação dos conhecimentos produzidos na área e estarão disponíveis a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas em Educação Matemática ou em outras áreas.

São Paulo, junho de 2006

Profa. Ms. Rosa Monteiro Paulo — Doutoranda

Profa. Dra. Maria A. Viggiani Bicudo — Orientadora

ENTREVISTAS NA ÍNTEGRA

7.2.1.**Entrevista 1**. Professor do Departamento de Matemática. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. **USP**/**SP**. Em 26 de outubro de 2005 as 14:00 horas.

Pesquisadora: *Em sua opinião, qual o significado dos diagramas (figuras) na produção do conhecimento matemático? E nas atividades de ensino de matemática?*

Entrevistado: Primeiro, eu gostaria de falar do ensino de geometria.

A geometria é o protótipo da ciência dedutiva. Ela é apresentada para os alunos assim. É uma teoria onde existem afirmações que você admite como verdadeira, postulados e axiomas e a partir deles, usando a lógica você começa a deduzir os chamados teoremas daquela teoria. E, como exemplo dessa estrutura toda, o primeiro exemplo que vem é sempre a geometria. Então, é muito forte esse aspecto dedutivo na geometria. E, quando você via por esse lado, sempre se dá muita ênfase ao formalismo da teoria, quer dizer, até alertam que você usar a figura não faz parte da demonstração de um certo fato. Aquilo serve apenas como um auxílio que está ali em paralelo. Mas você não pode usar fatos que estão sendo induzidos pela figura. Então, sempre se enfatiza isso e existem até exemplos de paradoxos que podem ser construídos onde você faz recurso de uma figura e chega a resultados completamente absurdos. Então, tudo isso vem por causa desse aspecto dedutivo da geometria, até de um ponto de vista histórico isso, desde o tempo de Euclides, pois ele mesmo já apresentou assim a geometria. Mas eu acho que, na direção do ensino da geometria, ele é um aspecto importante claro, o aspecto dedutivo, a história está aí para mostrar isso e a gente não vai negar dois mil anos de história mas existe um outro aspecto também que é muito importante no ensino da geometria que é o aspecto indutivo. E esse que eu acho que é muito pouco explorado pelos nossos textos didáticos, pelos nossos professores, de um modo geral. O que é que eu quero dizer com isso? É que, muito mais do que aquela formalização, definição, teorema, prova, eu acho as vezes mais interessante, seria as vezes muito mais proveitoso para o nosso aluno se ele pudesse ao invés de receber um resultado pronto, ele pudesse chegar aquele resultado. Ao invés de "*vamos provar o teorema do ângulo inscrito*", vamos arrumar uma maneira de o aluno possa conjecturar aquele resultado, ele chegar no resultado. Porque, na matemática profissional, em geral, se faz assim. A prova é conseqüência de um resultado que foi especulado, foi testado, usando outros recursos. E, no ensino da geometria, esse lado, esse aspecto indutivo da geometria eu acho muito pouco explorado. E existem muitos recursos hoje em dia para você fazer isso. A própria construção com régua e compasso é um ótimo instrumento para você explorar esse aspecto. Fazer o aluno construir figuras, ou com régua e compasso, ou usando algum software de construção geométrica. Ou seja, hoje, existem muitos instrumentos para o aluno usar esse recurso para conjecturar resultados. E aí sim, aí a figura entra de uma maneira fundamental, pois é o aspecto visual. Aquilo assume uma postura muito mais relevante do que quando você faz os aspectos dedutivos da teoria. Então, essa é uma primeira coisa que eu queria destacar que é a falta de importância que tem-se dado para esse aspecto da geometria.

Pesquisadora: a construção?

Entrevistado: É. Nós estamos falando das construções, mas, talvez, poderíamos até inventar outros métodos para se trabalhar com esses aspectos indutivos. A gente sempre cita as construções porque, para o aluno, acho que é o que é mais chamativo. É aquilo que ele tem a disposição dele. É o recurso mais viável.

Porque também poderíamos pensar em materiais concretos, dobraduras, enfim, existem outros recursos também para se fazer isso. Então isso é com relação ao ensino da matemática. E você também me perguntou a respeito do matemático profissional, né? Como é que ficam os diagramas na *produção* do conhecimento?

Pesquisadora: Isso, se os diagramas têm alguma relevância na produção do conhecimento, para o matemático.

Entrevistado: Eu diria que sim, principalmente para a compreensão de resultados geométricos ainda é fundamental a utilização dos diagramas. Eu me lembro aqui de uma situação que ficou assim extremamente famosa, que é um caso que aconteceu nos anos 80., coisa de 15 ou 20 anos atrás. Tem uma teoria em geometria diferencial, chamada teoria das superfícies mínimas, e existem, já eram conhecidos desde o século XIX vários exemplos de superfícies pertencentes a essa classe. O nome mínima é, não sei se você já ouviu falar, porque elas minimizam a área quando você fixa um contorno. Existem até aqueles experimentos que a gente faz com bolhas de sabão que você mexe uma estrutura de arame e quando você levanta ... E com relação a essa teoria se conheciam alguns exemplos, como eu já falei, desde o século XIX, e se queria, se buscava um exemplo de uma superfície desse tipo que tivesse uma mesma propriedade que é a que o catenóide tem. O catenóide é um exemplo de uma superfície mínima bem conhecida e que tem a propriedade de não ter auto intersecções, e, além disso, tem uma propriedade topológica que é importante para estudo que é uma coisa de curvatura total finita, enfim é um objeto que mede a área da aplicação normal de Gauss. Então e se buscava outro exemplo. Quer dizer, existia um que é o do catenóide e se perguntava será que não existem outros? E teve um matemático, inclusive um matemático brasileiro, Celso Costa, que fez uma tese de doutorado no ITA. Ele não estava procurando exatamente esse exemplo, ele estava pesquisando outras coisas e apresentou um exemplo de uma superfície, mediante equações, e você sabe que é muito difícil tendo equações de superfícies, às vezes, um gráfico, mesmo de uma função de duas variáveis, às vezes, você consegue dar a equação da função mas o gráfico, fazer o desenho torna-se, as vezes, muito complicado. Nesse exemplo do Celso Costa, o que aconteceu foi exatamente isso. Ele conhecia o desenho, digamos, a superfície tinha assim um certo miolo que era extremamente complicado e fora desse miolo a superfície tinha assim um desenho que lembrava muito uma saia de bailarina, então essa parte, fora desse miolo, ele conseguia ver bem. Ele conseguia, a partir das equações, fazer inclusive o desenho na mão, ele até me contou pessoalmente que a primeira vez que ele fez esse desenho ele estava até num bar e ele fez o desenho num guardanapo, porque ele estava tomando chope com os amigos e era o papel que ele tinha, aí ele conseguiu. Mas ficou essa questão da pergunta o que era o miolo. Aí, no dia da defesa da tese, fazia parte da banca um matemático americano, David Hofmam, que tinha muita familiaridade com o uso de computador, usar o computador como recurso para obter imagens. Então, ele sugeriu ao Celso Costa que analisasse usando o computador como é que seria o miolo daquela superfície dele. Mas o Celso, não sei porque razão não se entusiasmou muito com isso e ele não foi atrás disso. Mas o Hofmam, que era o matemático que estava presente ele levou adiante o projeto e colocou aquelas equações no computador para investigar e, usando aquele recurso gráfico, aquele diagrama, ele começou ... A princípio ele não enxergava muita coisa na tela do computador mas, devagarinho, rodando a figura, colocando ela em outras posições, ele começou a perceber algumas simetrias, parecia que a figura tinha alguns planos de simetria e, a partir dessas indicações que o computador estava lhe dando, ele começou a tentar mostrar, fazer a conta algebricamente. E, com o auxílio dessas simetrias, ele foi, aos poucos, reconstruindo o miolo, aquele miolo que era extremamente complicado, mas, por causa dessas simetrias, ele foi conseguindo separar pedacinhos e, com isso, se chegou ao primeiro exemplo, depois de 100 anos, de uma superfície mínima que tinha uma propriedade importante. Essa superfície depois ficou famosa no mundo inteiro, foi capa de revista. Hoje ela é conhecida como superfície de Costa porque, embora não tenha sido ele que viu essa propriedade, mas foi ele que deu a equação e ela é reconhecida hoje. Esse é um exemplo que, veja você, se não fosse o recurso do desenho, não se teria chegado nisso até hoje. Então, mesmo na produção matemática. Pois o Hofmam agiu exatamente como um matemático profissional. Ele usou o desenho, no caso, ele usou o computador apenas como um indicativo de uma certa propriedade. O computador mostrou para ele um caminho: “olha, talvez, aqui, tenha algo”! A partir daí, com o conhecimento matemático que ele tinha, ele conseguiu provar. Então, um dos grandes resultados do século XX, do final do século XX, foi a obtenção dessa superfície. É curioso que, depois que descobriram essa, aí se descobriram muitas outras com aquela propriedade que se queria. Mas o mérito foi ter descoberto a primeira. Então, ao buscar como as figuras, os diagramas, entram na produção de matemática, sempre me vem à mente esse exemplo.

Pesquisadora: Professor, como você vê esse recurso nas geometrias euclidianas, por exemplo.

Entrevistado: Nos Elementos de Euclides, por exemplo, existem várias passagens que você percebe claramente que Euclides faz recurso àquele diagrama que está ali presente. Hoje em dia, numa teoria axiomática de geometria, dá-se importância a uma relação entre pontos que é chamada *estar entre*, quando um ponto *está entre* outros dois. Isso, para Euclides não havia necessidade, de uma formalização maior. Para os gregos, aparentemente, não existia necessidade de se postular informações a respeito dessa situação. Parece que deveria ser, mais ou menos, evidente, a partir de um certo desenho quando um ponto está entre outros dois. E, a partir daí, ele também usava quando um ponto estava no interior de um ângulo. Aparentemente, a figura era suficientemente esclarecedora elucidar esse fato. Como diz um ditado aí, o rigor é temporal. Ele depende daquele instante. Talvez, para os gregos, não houvesse a necessidade de um rigor a esse ponto. Uma coisa que forçou muito essa análise da geometria, essa análise mais rigorosa dos fundamentos da geometria, foi quando surgiu a geometria não euclidiana. Isso aconteceu no começo do século XIX. E, com o surgimento de uma geometria não euclidiana, quer dizer, com a possibilidade da existência de uma geometria diferente daquela geometria de Euclides que se julgava como sendo, até aquele instante, a que dava a descrição do mundo físico que a gente vive, seria a única geometria possível como apregoava o filósofo Kant. Isso forçou, então, uma profunda revisão nos fundamentos da geometria e foi aí, a partir desse momento, que se começou a fazer uma análise sobre esses aspectos dos Elementos de Euclides e se percebeu que havia uma porção de hipóteses tácitas que Euclides admitida. Não sei nem se ele ... talvez ele não tivesse sentido a necessidade de ter feitos aquelas hipóteses . Mas, enfim, foi só com a descoberta das geometrias não euclidianas que isso gerou todo um movimento na direção dos fundamentos da geometria e passou pelas teorias de Penao, de Bask Moise Bask que foi um matemático alemão que primeiro postulou essas propriedades do estar entre e culminou com o trabalho do Hilbert, quando, em 1889, ele apresentou o famoso texto Fundamentos da geometria. Ela ficou mais famosa justamente porque, no final do século

XIX, havia várias teorias axiomáticas para a geometria, mas a do Hilbert foi a que ficou mais famosa porque foi a que mais se aproximou de Euclides. Ele não abriu mão do espírito euclidiano. Ele tentou preservar ao máximo Euclides e o que ele fez foi ajustar aquelas hipóteses tácitas que aparecem nos Elementos de Euclides e conseguiu colocar um sistema de axiomas de modo que cobria todas aquelas hipóteses tácitas feitas pelos Elementos. A álgebra, realmente, não precisa desse recurso, mas eu acho também uma pena. Eu tive uma formação, os meus cursos de álgebra que eu fiz aqui, principalmente aqui no Instituto de Matemática, eu fiz com o professor Luiz Jacy Monteiro, que é o autor do livro Elementos de álgebra. Aquele livro, que deve ter alguma coisa em torno de 700 páginas, você não encontra uma figura sequer em todo aquele livro. E eu que fui aluno do Jacy Monteiro em vários cursos, a aula dele seguia exatamente aquele mesmo espírito. Eu nunca vi o Jacy Monteiro fazer uma figura na lousa, nunca vi. Tanto que, quando eu já estava fazendo a pós-graduação e eu fui fazer um curso de álgebra com um outro professor; por sinal, você conhece, é o César Polcino, era um curso de teoria dos grupos. Para mim, foi um choque quando, na primeira aula, o Polcino foi à lousa; ele ia começar o curso de teoria dos grupos, e ele começa o curso desenhando um quadrado na lousa. Ele desenhou um quadrado e, a partir do quadrado, ele começou a desenhar os eixos de simetria do quadrado. E o que ele queria com aquilo era achar o grupo das simetrias de um quadrado. Para mim, aquilo foi assim... eu achei que estava fazendo o curso errado porque nunca eu havia visto alguém fazer uma figura num curso de álgebra. Aquilo foi muito esclarecedor porque o César mostrou pra gente que, embora o curso fosse estudar uma estrutura bastante algébrica, poderíamos assim mesmo ter como recurso a geometria. Que aqueles grupos abstratos que ele ia definir, grupos diedrais, grupos cíclicos diedrais, aqueles teoremas todos nós poderíamos procurar ver algumas propriedades usando, por exemplo, os polígonos regulares, estudando as simetrias nos polígonos regulares ou, se você quisesse, no espaço, partir para os poliedros regulares, estudar as suas simetrias, então foi muito interessante isso. Eu acho isso muito salutar. Eu vejo com bons olhos quando eu pego um livro de álgebra e vejo que ele tem algumas figuras, alguns diagramas. Acho que isso faz parte também mesmo numa disciplina tão abstrata. .

E, falando também de textos, estou me recordando de um livro de geometria da Springer, de um matemático bem conceituado, um livro que se pretende ser de geometria elementar voltado para o curso superior que discute geometria euclidiana, geometria hiperbólica, geometrias arquimedianas. O que acontece quando você trabalha com um corpo que não é os números reais, só tem a propriedade arquimediana ... e aí ele destaque que ... porque, para você fazer construções com régua e compasso, você tendo uma propriedade tipo arquimediana, já é suficiente. Porque a propriedade arquimediana garante que, se você tem uma unidade, a partir de uma unidade, você consegue atingir qualquer grandeza. Dados dois números, a e b, com a menor que b, existe sempre um múltiplo de a com o qual você consegue atingir b. No fundo você está transportando segmentos, então, tem muita coisa que você consegue fazer com construções somente com a propriedade arquimediana. Mas o que me chamou a atenção nesse livro são as figuras. O texto é recheado de figuras. E, mais ainda, foram feitas a mão pelo próprio autor. Ele fez questão de fazer. Ele não permitiu que as figuras fossem feitas usando recursos computacionais ou recursos gráficos. Ele fez questão ele mesmo de fazer as figuras do livro dele. E ele diz que ele faz isso propositalmente que, não é a mão, ele faz com régua e compasso e ele justifica, dá lá uma série de alegações e ele vai um pouco na direção disso, do papel dos diagramas, pois ele faz questão de construir, com régua e compasso, as demonstrações que ele está fazendo. E ele faz isso até como um tributo a Euclides. Ele presta uma homenagem a Euclides e quer preservar um pouco o espírito dos Elementos de Euclides fazendo, ele mesmo, as construções. Em um certo momento ele apresenta a axiomática do Hilbert, ele tem um primeiro capítulo, introdutório em que, praticamente ele admite Euclides e faz uma geometria mais informal no sentido de Euclides. Ele dá uma série de propriedades da geometria elementar, ele propõe problemas tipo "*mostre que*" ... mas, tudo isso admitindo que você tenha um conhecimento da escola básica. Ou até mesmo se você alguma vez estudou os primeiros livros de Euclides e, num certo momento, ele introduz uma axiomática e ele escolhe a de Hilbert. A partir desse momento, ele faz as provas de uma maneira mais formal, mas as figuras acompanham o texto. Ao longo do texto as figuras fazem parte do acompanhamento para o entendimento das demonstrações. Evidentemente, não como parte da prova, mas como parte do entendimento.

7.2.2. Entrevista 2. Professora do Departamento de Matemática Aplicada. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica da Universidade Estadual de Campinas – **UNICAMP**. Em 03 de novembro de 2005 as 8:00 horas.

Pesquisadora: *Em sua opinião, qual o significado dos diagramas (figuras) na produção do conhecimento matemático? E nas atividades de ensino de matemática?*

Entrevistada: Sem dúvida, os diagramas fazem parte da minha vida. Eu sou bastante geométrica nas minhas argumentações. Então, quando eu estou pensando um exemplo, mesmo minha área de trabalho de utilização, eu gosto de pensar uma situação mais simples possível, mais baixa possível, em R em R2 em que eu possa fazer um desenho e ter um sentimento do que esta acontecendo ali. Nas aulas, eu percebo que é uma ferramenta muito importante para os alunos de apoio, de ajuda para a compreensão. Então os desenhos, as figuras, os diagramas, os gráficos, tudo isso faz parte bastante das minhas aulas, das minhas explicações, quer seja no cálculo, na geometria analítica. É um pouco mais difícil na álgebra linear, mas, quando é possível fazer uma interpretação geométrica, eu procuro fazer e lançar mão de uma figura, na geometria plana, sem dúvida. Então é um recurso muito usado nas minhas pesquisas e nas minhas aulas.

Pesquisadora: *Você teria alguma indicação de algum trabalho seu publicado para me indicar onde você tenha feito utilização da figura para expor a sua idéia?*

Entrevistada: Tenho sim, a gente coroou o trabalho do cálculo com aplicações no livro - o livro acabou de sair - é um trabalho conjunto com a Vera Figueiredo e a Margarida e nós estamos trabalhando com atividades computacionais e projetos no ensino de cálculo e sem dúvida o que nós trabalhamos no computador é a visualização. A coisa mais fácil que trabalhamos no computador é a visualização dos gráficos, das parametrizações, das curvas, das superfícies, os teorema importantes do cálculo, teorema de Green, de Gauss, Stokes na questão da visualização é um trabalho que mostra bastante nossa trajetória nesse percurso do computador no ensino de cálculo e como acoplar essas coisas e a ferramenta visual é muito forte. Mas, mais do que isso, você produzir uma figura no computador, produzir um gráfico e produzir e só, ainda é pouco, você tem que tirar o que você puder daquela figura, então fazer as perguntas, conseguir responder é mais essa trajetória que a gente retrata aí, é a busca do significado daquele diagrama para o aluno. É a interpretação, o que ele pode tirar é a leitura dele. Porque é mais do que simplesmente enxergar e fazer sentido daquilo.

Pesquisadora: Então, para você, na sua análise, a figura ajuda nessa leitura?

Entrevistada: Sim, o fato de ele poder olhar de várias maneiras e extrair dali as informações. Poder pensar o sistema linear como a interseção das retas e a solução única aquele ponto ou o gráfico e aquela janela e o que significa pensar se a tua variável é, por exemplo, uma porcentagem e você está fazendo em R todo o seu domínio, mas você só quer pensar no intervalo 0, 1 e assim por diante, coisas simples assim, mas como você pode trabalhar.

Num outro curso que eu trabalhei bastante com recurso visual foi desenho geométrico e geometria plana, porque, é claro, não há dúvida, que aí é muito forte. Nesse curso, eu trabalhei com atividades de laboratório usando o *Tabulae*, geometria dinâmica um programa da UFRJ. Teve uma atividade muito linda, do teorema de Pitágoras, que nós trabalhamos com aquelas pranchas do livro "Provas sem palavras". Eu propus para os alunos olharem seis pranchas do livro, que estavam demonstrando o teorema de Pitágoras com uma figura, e que eles escolhessem uma daquelas para poder trabalhar no laboratório. Trabalhar com aquela prancha, tentar entender o que aquilo significava, reproduzir a situação da figura e conseguir explicar e depois, no fechamento da atividade, eu pedi que eles escrevessem uma carta para a tia contando dessa vivência com a prancha, com o teorema de Pitágoras, entendimento e tal. Então, eu percebi que essa combinação das linguagens, da linguagem computacional, com a visual, a pictórica da imagem e a linguagem escrita, toda essa combinação, esse conjunto pode produzir muito conhecimento sim. Porque, mais do que a figura, pois ela pode falar uma coisa para mim e outra para você, mas, quando nós vamos trocar, escrever e colocar nas nossas palavras; nós vamos tentar ganhar um compromisso para tentar explicar melhor. Então, essa também é uma vertente que eu venho trabalhando bastante nas minhas aulas, o uso da linguagem escrita na produção de sentido.

Pesquisadora: Nas suas aulas de desenho geométrico e geometria, você também faz as construções com régua e compasso?

Entrevistada: Sim, com régua e compasso e no computador.

Pesquisadora: E, nessa sua experiência, você sentiu diferença entre a construção com régua e compasso e as construções no computador?

Entrevistada: Nossa; bastante diferença, e os alunos comentaram sobre isso, de como eles tinham que pensar de maneira diferente quando eles estão trabalhando com a geometria dinâmica porque, antes, eles faziam somente um "arquinho" de circunferência para fazer, por exemplo, uma bissetriz. Agora, no computador, ele tem que desenhar a circunferência toda, interpretar a figura, analisar o que ele pode aproveitar, mas - ao mesmo tempo - o que ele já tem que preparar a mais e como ele não pode de jeito nenhum roubar. Porque, se ele roubar um pouquinho, não ponto o ponto, ali, no lugar certinho, quando você vai mexer, aquilo tudo se desestrutura e, no papel, isso fica um pouco camuflado porque a sua construção é estática e, mesmo que você confira, como ter certeza de que aquele quadrado que ele fez é mesmo um quadrado? Enquanto que, na geometria dinâmica, você arrastou um ponto, pronto, fica tudo perdido. Além disso, tem também a questão da investigação no sentido de que o aluno pode experimentar e buscar as conclusões no movimento, então, a situação dinâmica permite que ele faça conjecturas e verifique se aquela medida é realmente a metade da outra, etc. No papel, ele fez uma construção; só tem um teste para fazer. Na geometria dinâmica, ele pode fazer n testes à medida que ele vai movendo e sentido – olha, aqui falhou, pronto, já não é verdade. Ou, "*puxa, está se mantendo essa proporção; isso deve ser verdade*", então, "*o que será que eu posso usar do que eu tenho para mostrar que, de fato, eu tenho esse comprimento igual a metade deste*", por exemplo.

Pesquisadora: E como você tem percebido a justificativa teórica deles? Você pede isso a eles? O que eles visualizam na figura, como eles justificam matematicamente?

Entrevistada: Eu peço, sim, porque esse é o fechamento esperado. Não basta você ficar só na exploração. Então, a idéia é construir uma base, fazer exploração, concretizar um resultado de uma maneira visual, exploratório e, depois, conseguir justificar. Mas isso não é uma passagem fácil. O que percebemos é que a visualização ajuda, estimula, favorece para alguns. Outros, que já têm a mente mais "organizadinha", eles deslancham muito bem, mas não é uma mágica. Além de não prescindir de não deixar o fato de que, só porque eu vi na construção dinâmica, já está mostrado, não, eu tenho que passar pelas etapas de justificar os procedimentos sim, mas seria um fechamento. Nas atividades, eu sempre podia esse fechamento: um pequeno relatório, uma prova, uma construção com régua e compasso *a posteriori*, alguma maneira dele fechar. Nesse exemplo do teorema de Pitágoras, eu pedi uma carta. Era uma maneira de amarrar aquilo, de saber se aquilo trouxe algum benefício para ele ou que benefício trouxe? O que ele pode me dizer depois de ter passado aquela uma hora no laboratório, o que ficou?

Pesquidadora: Você trabalha tanto no cálculo como na geometria com a importância da visualização? Ou seja, para você, há espaço para as imagens em ambas as disciplinas?

Entevistada: Sim, porém é necessário encarar a figura de modo que você possa tirar proveito dela, mas não fazer de conta que a figura já me mostrou tudo. Mas eu percebi que, nas atividades de laboratório com o Tabulae, por exemplo, muitos alunos falavam, mas, se eu já construí, para que eu preciso provar? Então, fica essa inquietação para eles. Se já está funcionando para todos que eu vejo aqui, não muda a propriedade, então é. Então, tem esse lado dessa coisa enganosa, mas acho que, na minha experiência, por eu gostar do desenho, porque eu acho que o desenho fala mais do que mil palavras, então, eu tenho essa sensação e, muitas vezes, eu peço para o aluno fazer um esboço daquilo que ele está querendo explicar, mas explicar também. Então, olhar a coisa junta, em paralelo, não é só a figura. A figura pode ser um rabisco, mas, muitas vezes, ele está explicando e fala: veja como eu fiz aqui no desenho, ou ele faz um zoom. As leituras do texto ficam, então, muito mais ricas quando você vê uma figura. A figura pode ser um apoio para você começar a se fazer as perguntas e penso que é isso que buscamos a mais com os alunos quando trabalhamos dessa maneira. Tanto eu como minhas colegas com quem trabalho, acho que somos muito geométricas. Agora mesmo, estamos fechando um trabalho de pesquisa de complementaridade em cones e, num primeiro momento, estávamos falando de cones em Rn, problemas de complementaridade tudo muito abstrato embora de dimensão finita. Não estamos nos espaços de Hilbert onde não poderíamos enxergar nada, mas mesmo assim, apesar de estarmos pensando em dimensões mais altas, fomos buscar um exemplo em dimensão 2 onde pudéssemos enxergar, concretizar e ver o que estava acontecendo para poder ampliar nossa teoria e isso nos ajudou bastante a ter outras idéias e a interpretar o que estava acontecendo. E é isso que falamos para os nossos alunos também: pensem num exemplo pequeno. Ele está programando um algoritmo e como que isso está funcionando? Você fez um exemplo pequeno? Você olhou como é que estava indo sua seqüência, os pontos? Pegou uma função que você já sabia o que ia acontecer e aconteceu o que você esperava? Se não funcionou será que você não entendeu o algoritmo? É o algoritmo que está com problema? É uma coisa da sua programação, do entendimento, do problema? Onde é que está a falha? Alguma coisa tem que estar seguro nas suas mãos para poder analisar as outras variáveis. Então, nesse sentido, eu acho que os diagramas, as figuras, os desenhos ajudam bastante.

Pesquisadora: Tanto para o aluno interpretar como para você na sua produção?.

Entrevistada: É lógico, sim. Porque, se a gente não conseguir falar para uma coisa pequena em dimensão 1 ou 2, como é que a gente vai sustentar aquilo para uma dimensão maior?

Eu acho que é só isso. Talvez, você tenha visto esse trabalho de geometria na minha página, as atividades, não sei se você chegou a ver.

Essa particularmente do Teorema de Pitágoras, é a atividade 5, se você depois quiser olhar. Nesse curso, nós tivemos a oportunidade de contar com uma investigadora da Faculdade de Educação. Ela estava fazendo um trabalho de campo e participou das aulas, assistiu às aulas e entrevistou os meninos. Ela estava olhando justamente essa coisa da linguagem escrita e ela sabia que eu ia fazer essa combinação no curso porque conhecia meu estilo, embora ela não soubesse que ia ser com geometria. E no HTEM, aquele colóquio de História e Tecnologia no ensino de Matemática de 2004, no Rio, nós apresentamos um trabalho juntas sobre essa atividade do Teorema de Pitágoras, as pranchas e tal. Tem o resumo estendido, acho que são 5 ou 6 páginas. Mas eu acho que ele está apenas no CD do congresso, mas eu posso te passar se você quiser, porque acho que ele também dá uma idéia dessa combinação do escrito, do visual, do computacional. Porque acho que, se fosse olhar, eu ficaria mesmo nessa linha de combinar, de tirar um pouco de proveito de tudo um pouco.

Pesquisadora: Tudo bem, professora, muito obrigada.

OBS: Ao final da entrevista, a professora disponibilizou o resumo estendido de seu trabalho apresentado no colóquio citado.

7.2.3.Entrevista 3. Professora do Departamento de Matemática Aplicada. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Em 03 de novembro de 2005 as 8:00 horas.

Pesquisadora: *Em sua opinião, qual o significado dos diagramas (figuras) na produção do conhecimento matemático? E nas atividades de ensino de matemática?*

Entrevistada: Aqui, na UNICAMP, nós trabalhamos na graduação e na pós-graduação. Atualmente, eu estou aposentada e vou dar geometria analítica, mas como colaboradora. Nós também temos trabalhado na Teia do Saber e dá para sentir o outro lado, pois trabalhamos com os professores da rede. Eu sou da área de Topologia, que é minha área de formação, e figuras...Eu não consigo imaginar nada sem figuras. Nada sem uma imagem, acho que não tem como, mesmo que não seja relacionado à geometria. Tem que ter uma imagem, tudo. Um gráfico, ele ajuda muito a entender alguma coisa. E geometria, por exemplo, as construções geométricas; se você tem um exercício que pede para construir um triângulo, conhecidas algumas coisas, o que fazemos? Nós fazemos um esquema antes. Se não fizer no papel, com certeza, está fazendo na cabeça. Quer dizer, para mim, é assim, eu não consigo imaginar de outra forma. Impossível uma pessoa que vai construir não imaginar alguma coisa, fazer um esboço para, depois, chegar no que está sendo pedido. Acho que nós temos isso na cabeça; eu não consigo imaginar sem isso. Então, eu acho muito importante. Penso que a geometria agora já está melhorando porque as pessoas estão se dedicando mais, procurando conhecer. Mesmo os professores que vêm aqui conosco fazer a capacitação, eles têm bastante interesse. Também o que tem ajudado, em minha opinião, são os programas de computação. No caso da geometria, o Cabri. o Skethpad e outros.

Pesquisadora: E você acha que eles ajudam em que aspecto a geometria?

Entrevistada: Na visualização e na própria construção da figura porque, as vezes, você faz uma figura e você não sabe fazê-la muito bem. Você faz um rabisco e, as vezes, isso te engana, você acha que é uma coisa e quando você vai ver “direitinho” ... Então, é muito importante. Por exemplo, uma demonstração você tenta, pensa uma figura, com aquilo, o que vai ser a demonstração, o que você pode tirar dali e daí você vai formalizar. Mas é importante você formalizar porque, às vezes, você pode estar vendo uma coisa errada, então, tem que tomar cuidado, tudo tem que ser provado, mas, sem a figura, não tem condições.

Pesquisadora: A sua área é a topologia, não é? Você lecionava alguma disciplina ligada a topologia?

Entrevistada: Sim, na graduação, tem espaços métricos que são topologia mas já uma generalização e no mestrado topologia geral, topologia diferencial, introdução a topologia diferencial, essas disciplinas, variedades diferenciais, também. Porque, aqui, nós damos aulas na graduação e na pós, embora nós tenhamos nossa área de pesquisa, como no meu caso é topologia algébrica, mas, fora isso, para dar aula, você trabalha com qualquer disciplina e em qualquer curso, para as engenharias, para a licenciatura noturna e diurna.

Pesquisadora: E, na sua área de pesquisa, topologia algébrica, na sua produção, de alguma forma você utiliza figuras, diagramas ...

Entrevistada: Diagramas, não... É claro, quando a gente está pensando, você usa tabelas, "desenhinhos" e tudo, mas aí, quando você vai redigir, você tira isso. Até alguma coisa que você montou, desenvolveu através de um cálculo, de um monte de dados, aí você percebe uma generalização e você vai, escreve a generalização, e não coloca tudo aquilo, mas tudo aquilo foi importante para você chegar ao resultado final. Então, você não coloca no artigo essa parte e até a gente guarda porque, de repente, a gente precisa mais daquilo do que do artigo escrito no final. Fora isso, o que eu tenho feito é nos mini cursos, voltando agora para o ensino, onde temos procurado fazer coisas com muitas figuras, Uma coisa bem simples que a gente fez foi um quebra-cabeça para a Revista do Professor de Matemática, aí sim, você põe a figura, mas, nos artigos, não tem nem as tabelas que foram feitas para se chegar aquilo.

Pesquisadora: Mas para você chegar àquilo ...

Entrevistada: Sim, para se chegar é preciso esquemas, figuras.

Pesquisadora: Que nível de importância isso tem para você?

Entrevistada: Bom... sem aquilo, eu não ia conseguir chegar ao resultado, descobrir isso. Eu não. Pode até ser que tenha quem consiga, mas eu, não, sem os esquemas, eu não conseguiria e, às vezes, com os esquemas é mais fácil para você passar para outras pessoas, também, se você quiser. Isso falando de esquemas, não de tabelas. Mas você me fez lembrar uma vez que eu tinha uma aluna de iniciação científica que teria que fazer uma apresentação de trabalhos. Cada um teria, assim, dez minutos. Era uma semana de Iniciação Científica. Um congresso. Agora, nem é feito mais oralmente, é feito em forma de Pôster, todos no Ginásio e o expositor fica lá para esclarecer alguma coisa. Mas, na época, era assim: eram marcados dez minutos e cada um fazia sua apresentação. Tinha um pessoal que era escolhido para analisar a apresentação e, depois, escolhia-se o primeiro, segundo e terceiro lugares. Eu lembro que, a aluna ia ter, por exemplo, no meio da semana a apresentação. Então, nós marcamos na sexta feira para a aluna mostrar o que ela ia apresentar nesses dez minutos. Na sexta feira, lá pelo final da tarde, ela me apresentou e eu disse: ainda não está bom. Eu sabia que não estava bom para apresentar, porque eu acho que, para apresentar, tem que estar assim numa forma gostosa, mas eu não dei uma sugestão para ela. Porque, sabe quando você sabe que não está bom, mas, na hora, também você não tem uma idéia de como fazer? Aí eu fiquei preocupada. Eu sei que pensei no final de semana para poder falar para ela no começo da semana. Daí, eu lembro que, na segunda feira, quando eu ia chegando lá embaixo, depois que terminou a aula, ela veio toda sorridente pro meu lado e disse: ah, eu tive uma idéia para fazer aqui que vai ficar ótimo. Aí, ela fez, apresentou e foi muito bem. Ela fez tudo na forma de esquema. E ela me disse que teve a idéia assistindo uma aula que não tinha nada a ver com aquilo. Então, ela organizou um esquema e conseguiu uma maneira bem objetiva de colocar na transparência e aquilo ficou ótimo. E eu lembro que, como tinha que escolher primeiro, segundo, terceiro lugar, ela pegou o terceiro lugar. E foi muito bom porque ela é que ficou pensando e conseguiu ver. Mas, o importante é que ela fez em cima de alguma coisa que, aparentemente, não tinha nada a ver e ficou ótima a forma de apresentar. Ela inseriu umas figuras, fez uma apresentação bem visual, era um assunto bem teórico, e ela conseguiu passar aquilo nos dez minutos de uma forma muito boa. Então, você vê, são os esquemas. Eu acho que, em tudo, os esquemas são importantes.

E, também, geometria sem figuras, eu acho que, agora, voltando, não tem nem como. Embora sempre temos que provar para não cair naquelas falácias, por exemplo, aquele caso de recorte de um quadrado que vira um retângulo e a área fica diferente, dá 64 é igual a 67 (acho que é isso!) isso foi colocado na Internet e vai para todo mundo. Uma vez alguém me perguntou isso, e alguém que não tinha nada a ver com matemática. Até nos fizemos isso num dos cursos da Teia do Saber do ano passado e a justificativa precisa de um pouco de conta, não dá para confiar só no visual senão você acha que é, mas não é. A figura não serve como demonstração. Ela serve para ver de onde surgiu a idéia, nesse aspecto, é muito importante. Mesmo na história, muita coisa surgiu dessa forma, você parte do concreto, de uma figura e, depois, tenta formalizar. Muita coisa veio da prática, no desenvolvimento inicial da geometria. Ninguém lançou na forma de equações, já tudo pronto. Veio passo a passo até chegar num nível formalizado. Por isso, que eu acho importante quando você vai dar aula, mostrar, desde o começo, que é isso aí que foi o princípio de todos os passos, ver na prática, o visual, o concreto, para desenvolver um raciocínio e chegar aonde precisa. Eu acho que o aluno também tem que percorrer um caminho, claro que não pode demorar séculos, mas deve ser de forma que também passe por esses passos.

Mesmo o matemático. É uma coisa que ele não abandona mais. Ele sempre vai buscar lá para poder chegar ao objetivo final, ele vai buscar lá na figura, no concreto, sempre toma algumas coisas assim, por mais abstrata que seja a teoria que você está desenvolvendo, sempre existe alguma “coisinha”, um exemplo simples que, quando você vai tentar provar qualquer coisa, o caminho é esse, se você vai tentar fazer alguma coisa nova, de você pegar exemplos e exemplos simples para você ver, ou, seja no caso de figuras ou na parte de números, você vai pegar exemplos simples.. Na geometria, mesmo se é uma coisa mais complicada, você pega exemplos simples, coisas palpáveis, para, depois, ir para o mais abstrato e verificar se aquilo vale em geral. Mas sempre você precisa por o pé no chão, primeiro. Esta valendo aquilo. É claro que você não pode parar ali, você tem que ir caminhando, mas você vai buscar a idéia lá no início, vai fazendo vários casos para, depois, chegar a um produto final que é uma coisa já geral mesmo, onde você não coloca todos os casos usados porque foram casos particulares que foram estudados para perceber que vale o geral. Se, de repente, você encontra algum caso que já não vale, você muda sua idéia.

É isso, não sei se tem mais alguma coisa que você deseja saber?

Pesquisadora: Não, é isso mesmo. Meu interesse é saber se, para o matemático, na sua produção, pesquisa, se o solo ainda pode ser uma figura, um diagrama. Se isso para ele tem algum significado.

Entrevistada: Eu acho que sim. Às vezes, mesmo que você não faça a figura no papel, ela está ali, na tua cabeça. Você a imagina. E, no ensino, eu acho fundamental você usar a figura. Em geometria mesmo, não tem como prescindir da figura. Mesmo nos cursos de geometria que temos dado, inclusive, para professores, percebemos que é bastante importante isso. Muitos professores não tiveram geometria e eles agora têm dificuldade e precisam de uma sugestão para visualizar as coisas, especialmente na geometria espacial. É válido até mesmo usar os sólidos concretos (objetos). É claro que, num certo momento, é bom que você se afaste das figuras... assim... não da figura, porque eu acho que, na cabeça da gente, ela nunca sai. Afaste-se de fazê-la no papel, afaste-se de não precisar de um modelo concreto, palpável, manipulável.

7.2.4. Entrevista 4. Professor do Departamento de Matemática da Universidade de São Paulo – **USP/SP.** Em *22* de dezembro de 2005 as 8:00 horas.

Pesquisadora: *Em sua opinião, qual o significado dos diagramas (figuras) na produção do conhecimento matemático? E nas atividades de ensino de matemática?*

Entrevistado**:** No que diz respeito ao ensino, eu acredito que isso pode fazer com que o indivíduo acabe se dando conta de uma trama de articulações, de elementos combinados que não é trivial e que pode servir para melhorar o seu próprio entendimento do que está envolvido naquela apreensão que parece ser instantânea e imediata. Ela é instantânea para a própria acepção, para a sua percepção da sua própria percepção. Quer dizer, como você se percebe percebendo as coisas. Diz-se, ah é instantâneo; eu vejo e é óbvio, é evidente. Bom, se existe uma certa evidência para certas coisas que você pode passar para outras, tem suas vantagens e tem que se valer dessas vantagens, mas tomar isso como trivial e como algo que não seja merecedor de análise, de atenção, como se não tivesse elementos dentro disso, como se já fosse elementar, não tivesse uma série de elementos que são protagonistas de uma sustentação disso que, aparentemente, é imediato, aí é falta de percepção. Falta de auto percepção, de auto observação e de observação dos outros também, e que tem seu prejuízo, porque se fosse só uma falta, algo como: "deixa, eu quero usar apenas minhas percepções, minha capacidade de constatar certas evidências do ponto de vista geométrico, porque ocorrem externamente, no mundo material e que eu transfiro para a imaginação e que já uso como apoio para outras elaborações que não são tão imediatas. Eu quero usar e só" – Ok, porque, aí, você não pode querer impor nada para que alguém se detenha nisso, mas é uma perda de oportunidade rica de possibilidades para re-qualificar tudo o que vem em seguida. Porque a primeira coisa é a relação entre números e formas. Os números não estão nas formas, quer dizer, quando eu adiciono dois segmentos, ou duplico, ou triplico segmentos, faço um número inteiro de vezes um segmento, existe uma operação de natureza geométrica que é de translação, para começar. E uma re-plicação, ou seja, uma reiteração da aplicação da mesma operação. Essa aplicação de um certo número de vezes é na operação. Ela não está no segmento. É numa relação... quer dizer, um segmento e seu transladado estão relacionados por uma translação, por uma certa operação ou uma função, uma correspondência entre pontos. E é a reiteração dessa correspondência, dessa transformação, como quer que se chame, é que vai gerando outras configurações, repetições de um segmento. Mas esse padrão básico de reiterar uma certa operação serve de apoio a muitos outros objetos e não somente a números. Ou seja, é um padrão básico que é partilhado por vários campos e não só pela geometria. Na geometria, ele dá dividendos especiais, quer dizer, existe uma intimidade, um certo conjunto de relações entre os entes geométricos, que a mediação dos números é extremamente fértil. Então, traduzir as relações geométricas em termos dos números, por exemplo, no caso das proporções, traz muitos dividendos, muitos ganhos, muitos fatores favoráveis para expandir o alcance das expressões das relações geométricas que, às vezes, pode ser feita com vantagens com o uso dos números. Mas reduzir tudo precocemente a relações entre números é perder uma riqueza, tanto da própria geometria, porque eu acho que você muda de campo cognitivo, você tenta reduzir um campo a outro, e isso já é uma perda, e se afasta da maturação, da expansão, do desenvolvimento daquele campo propriamente geométrico. Então tudo se traduz em números e aí acaba-se constatando que, quando se ensina, inclusive quando se conversa com colegas profissionalmente já estabelecidos, consagrados, chamados geômetras, muitas vezes eles têm determinadas capacidades de apreensão, até de perceber que existe um outro campo, que não está totalmente incorporado, reduzido ao campo algébrico, ao campo analítico e que essas capacidades, por não estarem sendo ativadas, ficaram atrofiadas como qualquer capacidade orgânica, anatômica, ou de várias outras naturezas, acabam atrofiando se elas não são exercitadas. Acabam encolhendo, se reduzindo. Tratar disso assim dá um certo trabalho, mas tudo dá trabalho, porém a recompensa supera em muito o investimento. Ou seja, o benefício em relação ao custo é muito grande e, daí, novamente, não é só uma questão de reduzir ao aspecto quantitativo, é o aspecto de multiplicar conexões, diversificar possibilidades de transferência, de pontes entre campos diversos e ganhar mais entendimento de cada um a partir das relações com os outros. Aparentemente, é comum a qualquer campo de entendimento, mas é interessante ver como é que, especificamente, isso pode ocorrer, se tem possibilidade e, se começarmos desde uma idade bem tenra, tem-se tempo de sobra, podem-se promover experiências, constatações, incentivar a expressão de opiniões a respeito do que se está observando. As crianças, os adolescentes e mesmo os adultos, às vezes, precisam ser resgatados daquele deserto cognitivo onde estão sem água, definhando, vivendo de pedras e gafanhotos. Então, vamos diversificar a dieta dos praticantes de matemática, pode ser dos profissionais pode ser - como se diz hoje em dia - do cidadão, ator dentro de uma regência constitucional que tem direitos e deveres e está sempre desatendido dentro de seus direitos básicos de ter acesso a possibilidades que não violam em nada o acordo comum da convivência em sociedade, muito pelo contrário, só teria a enriquecer, mas isso, em nada, é incentivado, praticado. Tem muitas palavras bonitas nos PCNs, mas entre as palavras bonitas e as práticas, tem uma distância muito grande. Isso não quer dizer que, se fosse investir, isso seria difícil. Deve-se começar dos elementos mais básicos. Não adianta começar de um ponto onde já se tem maus hábitos, marcados, e ir condicionado até a forma de acionar as cognições, as relações, o entendimento, as práticas que já estão marcadas por um certo mau hábito e o foco direcionado para determinados aspectos que excluem outros. Toda vez que esses assuntos, supostamente do campo geométrico ou das relações entre geometria e álgebra, aritmética, análise, topologia, forem cogitados, eles vão já vir dentro daquele molde restritivo e estanque. Quer dizer, não se ganha só na inteligibilidade e na riqueza. Ganha-se, também, nos aspectos matemáticos. Ganha-se nos dois lados, quando você enriquece as suas diversidades de alternativa de entendimento num estado espontâneo, sua imaginação fica mais ativada, mas, também, mais amparada tecnicamente. Você traduz tecnicamente, você consegue entender melhor como é que as formulações técnicas formais têm origem em cada um desses campos, como é que elas se expressam a partir desses campos e ao mesmo tempo em que se conecta o técnico com o campo de ocorrência cognitiva ou o momento vivo da apreensão, distinguem-se as duas coisas e se conectam as duas coisas. Ganha-se de vários lados, pois tem-se um conhecimento de onde teria vindo e pode se levantar questões que são pertinentes ao campo de apreensão, pertinente ao campo técnico, pertinente as conexões e não fazer uma confusão total. Por exemplo, quando se diz, “ah isso é evidente”! Pode ser evidente do ponto de vista da apreensão, a partir do aparelhamento cognitivo dado neste estágio de evolução biológica, social e cultura. Mas e daí? Tudo acabou por ai e já se passa para frente? Como que isso se transfere, como isso está incorporado? Às vezes nem está muito claro como é que dentro dos axiomas, dos pressupostos, do arranjo teórico, isso está representado lá. Quer dizer, o que é tomado como evidente já se passa por cima e, com isso, se acaba empobrecendo o que vem depois. As pessoas acabam aprendendo até coisas muito sofisticadas, quer dizer, que vai para o campo profissional, não o estudante em geral, mas mesmo os que praticam o ensino, e depois acabam sendo prejudicados. Ficam limitados por saber se mover somente dentro de determinadas camisas de força que, por mais que se pareçam cheias de espaço para se mexer, são camisas de força. Depois se tenta vender essa..., não talvez como uma entonação sádica assim - “bom, já que eu sofro com isso, vou querer que os outros sofram e eu vou ter, pelo menos, o gosto sádico de que os outros vão sofrer como eu sofri” - mas, porque eu acho que é até natural, mesmo. Se for questionada, a pessoa irá dizer: “bom, tem alguma coisa de errado com isso? Não foi assim que eu aprendi? Eu estou tentando fazer o meu melhor, não estou fazendo descuidadamente, estou até seguindo preceitos, ordem, adoto uma fonte bibliográfica ou, pelo menos, o arranjo que eu apresento está apoiado num certo conjunto de fontes confiáveis, tem começo, meio e fim". Mas está empobrecido, desidratado, ressequido, meio definhado. Falta aquela riqueza mais orgânica no sentido de que se pode traduzir, inclusive, em termos técnicos. Falta a discussão fenomenológica, cognitiva, inclusive tecnicamente. Você pode começar falando mais livremente para tentar apreender como é que as coisas acontecem. Por exemplo, quando eu comecei a estudar álgebra linear. Álgebra linear, digamos, pela simplicidade da aparência, da forma aparente, fica mais fácil saber do que está se falando, pelo menos o objeto apresentado diante de si. Quer dizer, quais são as regras e tal. Não ficam coisas incertas, pressupostas. Os dados estão ali. Toda a riqueza de semântica, de possibilidades, aplicações, são reforços. Não é evidente de imediato de quantas formas ela pode se desdobrar em termos interpretativos. Em geral, os textos têm um certo repertório de equações diferenciais, sistemas algébricos, algumas aplicações da geometria. Quando eu vi isso, fiquei contente porque eu nunca tinha visto uma geometria apresentada de modo que partisse das relações geométricas. Então, ela se re-construiu dentro de um cenário algébrico. Então, eu fiquei contente num primeiro momento porque as outras construções ficavam sempre incertas em relação ao que faltaria para completar de modo claro a estrutura lógica. Não apenas do ponto de vista da exigência lógica, mas do ponto de vista de conciliar a lógica com aquilo que seria o objeto intencional, foco de estudo. Quer dizer, os entes geométricos têm certas características e eu quero reconstruí-los numa formulação em que atendam a requisitos lógicos, mas que continuem bem representados do ponto de vista geométrico.Mas como as apresentações de geometria eram mais em cima de evidências de figuras, o que não tem nada de ser contra, mas que não se deve induzir que aquilo esgota a coisa. É aquilo que sempre se alerta: "não se pode depender da figura para as demonstrações", é um alerta! Não pode ser levado muito ao pé da letra, como se fosse um pecado olhar para as figuras". Pelo contrário, você está sempre se motivando e, mesmo quando se está trabalhando numa coisa muito abstrata, topológica, em n dimensões, você faz um rabisco, um esboço, um rascunho, um apoio sugestivo para acionar alguma conexão. Ou seja, você está no campo abstrato, mas, ainda assim, você faz figuras que, de algum modo, representam as relações ali, às vezes, não tão fielmente do ponto de vista figurativo. Mas, ainda assim, é um acionador cognitivo de relações, mesmo quando se está no campo abstrato. Então, quando se está num campo onde as coisas são difíceis de se distinguir, a figura que você desenha é muito próxima daquela que você está querendo reconstruir logicamente, aí, fica difícil separar, distinguir. Quer dizer, as apresentações da geometria as quais eu tinha acesso, normalmente eram enunciados muito simplificados e alguns procuravam se apoiar na figura. Como se fosse algo do tipo: você está enxergando? Então, é isso. Não se conseguia distinguir o que deveria ser a reconstrução lógica, a figura propriamente, e ter um meio de conferir, de examinar se o quanto eu tenho ali apreendido na figura e o que eu quero reconstruir logicamente podem ser conferidos como sendo objetos de uma operação fiel e tal. Nada disso pode ser tematizado dessa maneira, fica tudo confuso. Quer dizer, se você enxerga alguma coisa, então, você já fica satisfeito porque você se situou. Não tem nada de mal nisso, mas, assim, num momento um pouco seguinte, onde se tenta avançar no sentido de tentar distinguir as coisas e ver o âmbito de cada coisa, aí, cabe, sem deixar a figura de lado, pelo contrário, até você re-qualifica melhor porque fica claramente distinguido o que é do campo da apreensão imediata, que e quais aspectos estão na reconstrução racional, lógica e de que modo você pode fazer essa aferição. Quer dizer, todas essas coisas, eu acho, é um momento de riqueza. Assim, um entendimento geral, um entendimento de cada campo e é um enriquecimento de capacidade de inteligibilidade das coisas e do campo próprio de cada coisa. Você não vai desmerecer nada, nem a figura, nem querer reduzir uma cosia a outra, nem abandonar alguma porque foi usada como ponto de apoio, de partida. Quer dizer, se devidamente usada e sabendo o seu *status* e, depois, em que momento você faz um deslocamento de campo e vê: bom, agora está entendido isso aqui dentro do objeto que seria o objeto de motivação da construção racional, então, onde que eu encontro isso lá, como é que eu posso distinguir e aferir se tem a conexão que eu estou pretendendo que tenha? Então, eu acho que são essas coisas que faltam basicamente. Poderia detalhar-se mais, dar exemplo, um monte de exemplos onde essas distinções são borradas e são obscurecidas em prejuízo da diferenciação consciente. Quer dizer, progressivamente consciente, você vai se conscientizando de que você tem essas capacidades distintas, mas que elas estão todas meio confundidas, superpostas e, se você não diferencia para depois integrar novamente, num campo maior, você perde uma série de recursos e a própria riqueza da diversidade que existe potencialmente oferecida, não afirmadas de modo taxativo como se devessem ser acreditadas, mas que pode ser, da mesma forma que você observa regularidades e chama a atenção no mundo fenomênico, físico, biológico, cosmológico, qualquer campo de investigação científica, com um método científico, você pode também planejar experimentos ou vivências, aprendizados, compartilhamento de constatações desse processo todo, e submeter a exame se é assim mesmo ou não é. O que eu tenho experimentado é que isso é uma oportunidade oferecida naturalmente e é perdida, desfigurada, para usar a palavra mesmo que é um pouco da discussão das figuras. Desfigurada! Ela é uma coisa meio monstruosa, assim como a gente, quando vê alguém meio desfigurado, tem um misto de medo, repugnância, talvez se veja - se eu estivesse daquele jeito - mas ninguém se enxerga muito do ponto de vista cognitivo como alguém que está desfigurado, ou que está com membros, entre aspas, recursos, partes do organismo cognitivo atrofiados. Deveria dar-se mais atenção para isso, pois, no meu entender, o que ocorre é tão ou mais aterrorizador do que quando enxergamos alguém atrofiado, alguém que é alvo de um acidente, de uma queimadura grave, qualquer coisa assim bastante horrível. Quando não está aparente, as pessoas fazem vista grossa como se; ah .. é assim mesmo.. É mais difícil de perceber quando todo mundo está convivendo com a mesma coisa. Fica imperceptível, quer dizer, você tolera. Você desenvolve um grau de tolerância e, daí, acaba não percebendo e, se alguém falar, você diz:" bom, é verdade, tem alguns problemas aí, mas, afinal, são coisas da vida". É uma simplificação meio exagerada, acaba sendo simplório e, daí, vai indo para o irresponsável, para o inconseqüente. Parecem julgamentos morais, mas assim, inconseqüentes no sentido de que não estão preocupados com as conseqüências, sendo indiferentes com as conseqüências, mas isso também tem conseqüências porque podem ser avaliadas pelos resultados que dão, se consideramos que é bom ou não é. É nocivo. É saudável ou não é saudável? Promove talentos? Promove habilidades? Promove desenvolvimentos ou não? Não tem como fugir, ser absolutamente neutro. Pode-se tentar evitar, em alguma medida, ficar julgando desnecessariamente em algum momento. Mas, em outro, temos que fazer opções, principalmente quando tem questões em jogo que seriam de deixar várias riquezas que são feitas naturalmente, com um pequeno esforço em cada momento, mas com uma visão global de grande envergadura, mas que, para realizar, precisa de pequenas ações, desde que elas tenham uma coerência com uma visão das possibilidades que existem no grande percurso, é preciso ter uma visão disso aí. Alguma evidência também e, se certas pessoas colocam em dúvida isso, elas precisariam, pelo menos, conceber a possibilidade de experimentar para confirmar ou refutar aquilo que está sendo afirmado – que existem as riquezas e que ela não custa muito ou, pelo contrário, não desenvolver tem um alto custo. Da mesma forma como, no sentido geral, você não fazer medicina preventiva... Quer dizer, se você não toma certos cuidados que seriam simples de fazer em cada momento, em momentos propícios para se prevenir, para se antecipar aos fatos, para evitar certos fatos nocivos, depois o custo social, como está sendo o descuido com a alimentação, descuido com hábitos de poluição e tudo mais, o custo acumulado para reverter está numa escala muito maior do que seria aquele para conseguir, primeiro, evitar isso, então, já seria evitar um prejuízo grande, e não só evitar esse prejuízo como se ganharia toda uma riqueza natural, no caso da saúde, da prevenção de acidentes, uma série de coisas de interesse social e do bem comum. A vida ficaria bem melhor e acabaria desenvolvendo o lado positivo. Não é só evitar o negativo, quer dizer, ou você ganha duplamente ou perde duplamente, ou multiplamente. Não tem meio termo, quer dizer, não se fica no neutro – nem ganhou, nem perdeu. Ou você ganha muito ou você perde muito. Quando o prejuízo é instalado, de modo geral, na realidade, não só discussões teóricas, cogitações, etc, diante da realidade que está aí em todos os campos de modo geral. A educação é um dos que padece gravemente como outros. A questão de saúde em geral: saúde da educação, saúde da saúde, saúde da economia, saúde das relações sociais, saúde da solidariedade, convivência e promoção do benefício mútuo e tudo mais. No caso da educação se configura, praticamente, uma tragédia. Do mesmo modo que tem desastres naturais devastadores, esse, embora não seja natural, é tão ou mais devastador, com mais conseqüências, com mais enraizamentos e com chances de permanência, de permanecer. Ele já está instalado nas estruturas, nas práticas. As pessoas incorporam as práticas e vão transferindo, vão servindo de exemplos, vão moldando os próximos segundo suas próprias práticas, seus maus hábitos, nocivos, e fica cada vez mais difícil de modificar se não se toma uma atitude em outra direção. Diante do que está, qualquer coisa é lucro. Qualquer coisa, porque pior é difícil de ficar. Mas sempre há espaço para piorar, mas, se existe alguém que está propondo alguma coisa, pelo menos, com aparência de viável; embora muitas coisas sejam embaladas com aparência de viável e... Como conselhos. Tem conselhos e boas intenções que podem ser maravilhosas, mas podem também ter embutida uma armadilha. Mas se, pelo menos, sob um exame inicial, tem alguma chance de ser amparado por outras evidências, por algumas outras experiências, apontar para uma possibilidade de ganho, investindo-se numa certa direção, diversa da que está aí, acho que, pelo menos, deveria tentar-se fazer algumas experiências restritas. Mas não é só uma tragédia, uma fatalidade. Mas existe uma acomodação, uma omissão de responsabilidade, e vai-se caminhando nessa direção, isso pode se configurar um crime. Um crime sócio-cultural, político, no sentido do bem comum. É um crime. Diz-se: “ah é difícil mudar”. Bom, é tanto mais difícil quanto se repete cada vez mais que é difícil. Existe um monte de obstáculos, ausências e limitações de recursos e tudo mais. Porém quando se investe em alguma coisa que é saudável para o ser humano, normalmente uma boa parte, não é só financeira, econômica e de recursos materiais, porque se multiplica muito rapidamente o retorno quando se investe no ser humano de um modo mais condizente com a própria potencialidade da riqueza do ser humano. Tem que haver sempre um respaldo material e uma persistência na sustentação de uma certa opção, de uma certa determinação, porque tudo aqui é muito volátil. Uma hora, é uma coisa, outra hora, é outra e tudo se apresenta como se fosse: agora isso vai ser uma solução. Ou tenta-se ser um pouco mais despojado, não se anunciar tanta ambição, mas: "agora isso vai corrigir alguns aspectos desastrosos ou extremamente regressivos da cultura da educação". E cada hora é uma moda e, na verdade, os aspectos fundamentais de sustentação social da prática educativa não são atendidos. Então, há sempre uma substituição, uma descartabilidade de metodologias, de projetos políticos, culturais e, aparentemente, ficam muito semelhantes aos bens de consumo descartáveis. Não muda muito, aparentemente, são tratados como se fossem da mesma categoria. E são, totalmente diferentes. Bom, isso que eu estou falando não é nada de extraordinário, pois, volta e meia, as pessoas acabam caindo nessa constatação, mas precisaria fazer alguma coisa, pelo menos as classes profissionais que estão envolvidas nesse assunto. Elas têm alguma responsabilidade nisso; não é só a pesquisa, as constatações. Precisa ter aquela serenidade, às vezes, aquele distanciamento crítico para fazer uma análise, um diagnóstico, não tão mergulhado sujeito às intempéries e aos fatores que nublam um pouco a capacidade de análise. Mas, de qualquer forma, feito isso, nós continuamos dentro da sociedade. Continuamos dentro dessa tragédia, dessa indigência cultural, da indigência educativa, das instituições irresponsáveis. Mas é o aspecto que é o invólucro de tudo.

Eu gostaria de discutir, talvez em outra oportunidade, mais os elementos que são foco do seu trabalho, que é voltar. Eu comecei a falar da geometria, como é que eu aprendia, como é que eu uso no meu ensino. Como que eu procuro usar, como é que eu estou, no momento, envolvido intensamente, bem engajado, tentar delimitar melhor isso e traduzir isso de uma maneira mais efetiva, conseguir simpatizantes ou até oponentes que estejam dispostos a discutir para aperfeiçoar as coisas. Não simplesmente para descartar e dizer: "não, isso aí é inviável", para acabar logo com a discussão. Eu tenho confiança em vários aspectos das questões que estou levantando, mas elas não são definitivas nem exaustivas. Simplesmente, apontam várias possibilidades. Então, seria o caso de entrar nos pormenores para ir examinado e colocando sob testes: planejando experimentos, didáticas. Nada muito ambicioso, mas conseqüente. Também, sem falsa modéstia com relação aos propósitos. Não tem por que ser modesto, pois a riqueza é natural. Simplesmente, precisa não ficar destorcida no sentido de ficar prometendo riquezas fantasiosas. Partindo de alguns pontos básicos que são bastante férteis, os outros vão se descobrindo e se experimentando praticamente. A prática e a reflexão da prática vão se enriquecendo mutuamente e isso vai abrindo novos horizontes. Não precisa antecipar tudo porque qualquer tentativa muito ampla de antecipação já está delimitando antecipadamente as possibilidades. E têm muitas que são, e vão sempre se adentrar como surpresa, como novidade. Mas existem algumas coisas que precisam ser revistas mesmo as que são tomadas como elementares ou simples.Quer dizer, se está perdendo a riqueza de coisas que são tomadas como banais, como sendo desprovidas de riquezas. Assim como: "ah isso aqui já é evidente, já é elementar, o que interessa são as outras coisas mais sofisticadas". Bom, se o fundamental é deixado de lado, eu acho que aí há uma certa tacanhice, uma certa grosseria no sentido de percepção até nas coisas sofisticadas. Quer dizer, há uma pseudo-apreensão do que se chamaria de sofisticado, nos campos mais avançados e tal. Quer dizer, as pessoas dominam tecnicamente uma certa faixa daquela estrutura complexa, matemática, mas são completamente insensíveis ou cegas para outros aspectos que estão naquele campo sofisticado porque elas têm o domínio técnico daquelas coisas, mas, como, lá atrás, na base, ela desconsiderou, tomou como não sendo importantes certas coisas que são extremamente constitutivas do que veio a ser toda essa formulação sofisticada da matemática, às vezes embutido de modo indireto. As pessoas pegam a formulação já tratada tecnicamente que, às vezes, é até necessário para você se restringir, não dá para abranger tudo, abraçar tudo, mas, pelo menos, precisa desconfiar um pouco de que nem tudo está circunscrito naquela formulação. Às vezes, ela atende a um aspecto técnico lógico e de domínio técnico que é necessário para utilização nas pesquisas, mas são aspectos para se refletir sobre como a própria pessoa que está produzindo aquilo, ela não ... é ... como são solicitadas dela própria, como ser cognitivo, uma quantidade muito grande de ações cognitivas superpostas, ela própria, naquilo que é eficiente e tem sucesso, ela fica contente e vai para frente. Ela fica um pouco cega dentro do seu metabolismo cognitivo. Ela não se percebe. Não se dedica, porque falta tempo ou porque ela está tendo sucesso, na medida em que ela tinha expectativa de sucesso, já está satisfeita, e deixa de exercer uma capacidade de reflexão. Não é reflexão racional. É aquela .. com o mesmo grau de atenção e de cuidado que seria necessário para um pesquisador ... é o aspecto de auto-observação. Como Goethe preconizava, Rudolf Steiner ou outros mais ortodoxos, porque esses são considerados um pouco extravagantes. As teorias epistemológicas, as teorias de conhecimento deles são consideradas um pouco extravagantes para o gosto dominante, mas de qualquer maneira; que seja um botânico, ele tem que ficar observando antes de aderir a uma teoria da moda para, às vezes, já tirar resultados, para publicar *paper* ... e muitas vezes, na prática, conseguir avanços, porque ele consegue avanços, mas aderindo, muito precocemente a determinados vieses teóricos já pré-estabelecidos antes de observar a natureza. Quer dizer, a natureza precisa ser observada, inclusive a sua própria natureza. Não adianta ficar somente observando a natureza externa. A própria observação da natureza externa depende da natureza da capacidade de observação da natureza externa. Se você não se enxerga observando, uma parte do que você observa está sendo perdido. Você pode ter eficácia pelo instrumental recebido naturalmente, sem nenhum esforço, ele é acionável e você se vale dele, mas não se detém a observar quais elementos estão envolvidos, que operações, que deslocamento, às vezes, que saltos mortais são dados de um campo para outro com analogias improváveis que, às vezes, acabam dando muito resultado, mas, mesmo quando uma analogia inconsciente é feita, você retrospectivamente passa a refletir no sentido de se observar. Não é só a reflexão que é crítica, analítica, de exame, mas também uma outra que é mais passiva, contemplativa, de reconstituir de memória, sem fazer análise exatamente. É como você tentar lembrar o que você fez num dia, ou num período do dia. Ah, eu fiz isso, fiz aquilo ... só vendo acontecer, mas não analisando, nem julgando nem classificando ou atribuindo qualificativos, mas simplesmente observando para ver como é que aconteceu. Ou seja, fenomenologicamente mesmo. Como aconteceu? Depois, num outro momento, pode ... Bom, se alguém consegue fazer isso ao mesmo tempo, tanto melhor, mas de modo distinto. Há a observação, há a análise, a identificação de atributos, mas, antes de qualquer coisa, que transportes, que associações foram feitas de um campo para outro para eu descobrir alguma coisa?

Em certos casos, em certas analogias, certos transportes que têm teor técnico, esse teor técnico retroage sobre as imagens, quer dizer, eu posso ficar mais livre na associação imaginativa, posso retornar para quais aspectos podem ser transferidos tecnicamente porque essa rede de transporte, de idas e vindas, já foi percorrida várias vezes, então, eu posso me liberar um pouco mais para ir pensando figuradamente, imaginativamente, de modo, às vezes, até um pouco difuso porque são figuras meio abstratas, são, digamos, disposições de relações espaciais de coisas abstratas, de conceitos, mas elas se dispõem no espaço. Quer dizer, os conceitos - mesmo do ponto de vista lógico; ao apresentarem subordinações, interdependências hierárquicas, dentro da lógica, ela se configura espacialmente - também, num sentido abstrato e que, às vezes, se reconstroem no sentido geométrico. E, algumas vezes, eu consegui, como no caso do teorema fundamental da álgebra, uma geometrização de uma demonstração onde a geometria se apresentava como direção a ser seguida, como percurso para mobilizar os elementos algébricos que se configuravam em torno desse percurso sugerido geometricamente. Ou seja, é, nesse sentido, uma demonstração geométrica. Puramente geométrica não faria nenhum sentido porque o teorema é sobre álgebra. Puramente geométrica significaria sem nenhum elemento algébrico, porque o teorema é sobre uma estrutura algébrica. Mas, por que o elemento geométrico subjacente, já existente ali, permeando a situação, uma vez que ele foi evidenciado como estruturador condicionante da situação, pôde ser traduzido numa demonstração formal com conteúdo geométrico? Isso só para dar um exemplo que ali houve muitos deslocamentos de campo cognitivo tudo assim, praticamente, instantâneo, tanto mais instantâneo, para a aparência da percepção e da auto-percepção, como se fosse instantânea, talvez porque as trilhas já tinham sido percorridas muitas vezes então o transporte se aparenta instantâneo. Na verdade, certas horas, eu acabo ficando muito lento. Por mais rápido que seja em alguns momentos, em outros, você precisa retomar, desde o início, uma certa situação. Outro dia, eu estava pensando sobre reflexões rotatórias ou inversões rotatórias, quer dizer, transformações geométricas do espaço, porque elas podiam ser convertidas uma na outra? E aí, alguma coisa começou a não dar certo. Quando alguma coisa começa não dar certo, não fluir, digamos, o argumento que é formulado logicamente, teoricamente, o aparato técnico, mas que tem o jargão, a terminologia que reconstrói o intuitivo, digamos, dentro do técnico, você vai argumentando e só encadeando fatos já conhecidos que evocam a coisa geométrica, o campo é geométrico de ilustração, mas ele é construído tecnicamente, algebricamente, tudo mais, mas você nomeia as coisas, os objetos, a matéria prima que constitui a estrutura que é propriamente algébrica, mas que você quer construir um cenário geométrico com aquela matéria prima; então, você vai nomeando geometricamente as coisas algébricas. Quando se fala o plano cartesiano, etc e tal, mas não é o da geometria usual, da geometria original, mas pares de números reais, equações que definem retas, quer dizer, você chama de reta, etc, e tal, mas, quando você já demonstrou um certo número de relações para aqueles entes com os nomes geométricos, você vai usando cumulativamente aquilo e você faz um discurso geométrico. Quando você tenta fazer argumentações que pareceriam que iriam fluir de acordo com a expectativa e começa a enroscar, eu, normalmente, não fico assim: ah deixa pra lá e tal. Eu vou até saber o que é que está acontecendo. Primeiro, assim, o que está acontecendo tecnicamente. Na primeira camada, onde é que está dando pane? Onde é que está dando enrosco? É uma falha de modo de combinar, as coisas usualmente combináveis que se esperaria que dessem aquele resultado que a gente está visando ou está tendo um misto de problema técnico com cognitivo mesmo? Quer dizer, eu tenho um exemplo, que é esse que eu mencionei de converter inversões rotatórias e reflexões rotatórias na geometria espacial, nas isometrias do espaço, eu precisei de novo ficar desenhando planos para ver onde é que está falhando o argumento que você esperaria que saísse fluentemente? Como você não está gravando visualmente não vai poder ver o que eu ... ó. Mas isso é um exemplo e esse aqui é um outro. O que eu fiz estava até repassando essa noite ... Olha só para você ver. É uma álgebra, mas aí é um desenhinho, né? Álgebra topológica... Eu quero mostrar o desenho que eu fiz esta noite. Ah, achei, está aqui, ó. Ta vendo? Eu fiz contas, mas, num primeiro momento, elas precisavam de bastante atenção para firmar a correspondência das contas e as configurações geométricas. Então, para ver detalhadamente se corresponde cada coisa aos seus aspectos algébricos, combinatórios, sintáticos, representam bem aquilo que se visa geometricamente. Então, a partir de um certo ponto, quando você faz uma conta, você já se refere ao objeto visado e, muitas vezes, uma certa continha, por exemplo, uma comutação de duas transformações já tem a ver com o fato de um plano ser ortogonal a uma reta, é por isso que elas comutam. Comecei a fazer a conta aqui e não achei. . Mas você sabe o que é, mas, por exemplo, se eu fosse explicar para um aluno, então: “ah, sim, essa rotação em torno deste eixo deixa este plano invariante. O plano não muda, os pontos mudam, mas o plano não sai do lugar. A reflexão, ao contrário, ela deixa os pontos fixos no plano e inverte os pontos da reta vertical. Por isso elas comutam”. Agora: “ah mas precisa verificar em três pontos, uma vez que elas são transformações afins, isométricas, não precisa verificar para todos os pontos”. Não preciso usar uma fórmula geométrica para todos os pontos. Já uso o fato de que duas transformações coincidem se elas coincidirem em quatro pontos, independentes. Então, essas coisas vão sendo traduzidas, mas aquilo que já estava acumulado de relações algébricas e correspondia a coisas geométricas não estava funcionando para converter uma inversão rotatória, uma inversão no ponto O, uma rotação com uma reflexão rotatória, uma reflexão com a rotação. E o problema era o que? Com a conta? Com a disposição dos planos? Então, tinha que rever e voltar ao início e não usar fatos, digamos, já acumulados nas correspondências e jogar em projetos. Tive que desmembrar tanto as contas quanto os desenhos e, no final, eu acabei constatando que o plano que eu estava pegando numa certa ordem é que estava errado. Porque, dependendo da ordem dos planos, das reflexões que se faziam nos quatro planos que apareciam, não funcionaria mesmo e, reincidentemente, eu estava trocando como se troca direita por esquerda. Na conta e na imaginação de qual deveria entrar em primeiro, segundo ou em terceiro lugar. No final, era uma coisa simples, mas tem hora que enrosca mesmo, quer dizer, vale a pena? Eu, para mim, acho que sempre vale a pena porque, se cada coisa eu vou deixar pra lá, me dá um mal estar tremendo porque, por um lado, fica a dúvida: o que está acontecendo? Depois, mesmo que se constate que a confusão era uma coisa boba até, isso serve para se identificar onde é que se cometem esses deslizes de conexão de um campo para outro. Por que é que falhou a fluência? Normalmente poderia estar-se estudando outras coisas, mas eu acabo ficando aqui. Enquanto eu não resolvo, não dá para ir adiante. Eu até penso outras coisas, mas aquilo volta sempre até que eu identifique onde é que está o problema que está impedindo a coisa de fluir? E, normalmente, tem a ver com essas pontes cognitivas. Às vezes, é uma falha interna de um campo cognitivo, mas aqui, no caso, era tomar uma coisa por outra como a gente toma direita por esquerda. Em muitas situações corriqueiras dentro da matemática, em campos técnicos, toma-se uma coisa por outra. Qual coisa eu tomei por outra? Mas, quando as coisas têm assim muitas operações envolvidas, e muitas delas funcionam de modo eficiente, até automaticamente, você vai consertando e mandando para frente. Mas, quando alguma coisa não funciona, tem que se saber onde não funciona. E, normalmente, é uma coisa “besta”, conforme se costuma dizer. Mas, aí é que está, não é uma questão do objeto em si, mas do processo de entendimento, quer dizer, que conexão, que ligação, que associação, que eu fiz que dispõe as coisas de uma maneira como se fosse uma porca entrando enviesada no parafuso e espanando a rosca. Sem querer, na rapidez das ligações, alguma coisa entrou no lugar de outra sem que fosse voluntário.

7.2.5. Entrevista 5. Professor do Departamento de Matemática – Universidade Estadual Paulista. **UNESP/Rio Claro.** Em *14 de fevereiro de 2006* as 10:00 horas.

Pesquisadora: *Em sua opinião, qual o significado dos diagramas (figuras) na produção do conhecimento matemático? E nas atividades de ensino de matemática?*

Entrevistado: Eu acho que a utilização de figuras e diagramas é muitíssimo importante. No ensino, porque é um ponto de apoio para o raciocínio, mas não é só para o ensino. O matemático profissional, quando está trabalhando profissionalmente, ele faz as suas “figurinhas”. Mesmo que ele não desenhe, vamos dizer, ele tem, mentalmente, as “figurinhas”. É interessante você presenciar uma conversa entre matemáticos de altíssimo nível, um deles diz assim “não, mas esse rabinho da função, mas essa linhazinha aqui”. Tudo isso, na verdade, é a imagem mental ou a imagem que se desenhou, ou seja, um diagrama. Isso é importante na descoberta matemática também, porque, como eu disse, o diagrama é sempre um auxílio. Evidentemente, eu não vou dizer que aquilo que eu estou desenhando é, de fato, um objeto matemático, mas é certamente um suporte, um modelo dos objetos matemáticos que eu tenho na minha mente e estou tentando explorar.

Pesquisadora: Na sua opinião, esse suporte que você diz é para dar idéias ...

Entrevistado: Sim, é para dar as idéias para fixar os conceitos e mais, também auxiliar na demonstração porque, muitas vezes, você, olhando um diagramazinho, vê um caminho a ser percorrido para obter a demonstração que você quer. Eu acho que um exemplo marcante dessa parte; vamos chamar de heurística; é o tratado do Arquimedes, *O Método*, que é uma carta que ele escreve para um discípulo falando como é que ele faz a descoberta das proposições matemática e utiliza tudo quanto é possível ser utilizado: balança, alavanca, o que, de algum modo, representa também um diagrama, está fazendo um papel de diagrama e, depois de obtido o resultado, evidentemente, ele diz: bom, isso tudo é esquecido e, agora, eu vou trabalhar segundo os métodos da geometria, preconizados por Euclides e é o que faz o matemático profissional. Evidentemente, na publicação ele não irá falar do rabinho da função, ele vai dizer as coisas do ponto de vista matemático. Mas isso tudo serviu de suporte, serviu de apoio para que ele chegasse à conclusão que chegou. Então eu acho que, certamente, os diagramas, as figuras são muito importantes e todos os matemáticos profissionais sabem disso.

Pesquisadora: e com relação ao ensino?

Entrevistado: Bem, com relação ao ensino, é muito importante porque dá também um suporte para o aluno saber daquilo que o professor está falando, para que o aluno imagine os conceitos matemáticos, as idéias matemáticas, um meio para a demonstração. Certamente, é muitíssimo importante.

Pesquisadora: E quando se trabalha, por exemplo, com cálculo no R^n, onde não se consegue imaginar uma figura, um diagrama,...?

Entrevistado: o problema, quando você trabalha no R^n, vamos dizer, ele é simplesmente uma generalização do R, não é? E você tem esses diagramas no R e trata de imaginá-los no R^n, trata de estender os resultados que você tem na reta para os resultados do Rn. Então, o diagrama sempre é usado, por mais abstrata que seja a teoria, por menos que você consiga ver o que se faz, é sempre estudar casos particulares em que essas coisas podem ser visualizadas e, depois, procurar estendê-las para os resultados, aí, sim, só do ponto de vista matemático. Diagrama, eu acho que é sempre importante.

Pesquisadora: Com relação a Euclides, podemos perceber, inclusive no livro que você traduziu, que há muitas coisas, mesmo na demonstração, que ele faz baseado em evidências da figura, então, eu gostaria que você falasse um pouco sobre isso.

Entrevistado: Nas demonstrações de Euclides, há seis partes. Toda proposição que se preze, nos Elementos de Euclides, tem seis partes. A primeira parte, que se chama em grego *protesis,* é o enunciado da proposição. Depois, nas duas partes seguintes, ele vai decompor o enunciado nas *coisas dadas* (que se chama *ektesis)* e nas *coisas que devem ser achadas*, no que se tem e, depois, no que se quer, que se chama de *diorismos*, essa terceira parte. A quarta parte, que é a parte central do teorema, que se chama, em grego *kataskeuê,* é uma construção. À quinta parte, ele mostra que a construção de fato surte o efeito, demonstra aquilo que você quer, essa quinta parte se chama *apodeixis.* Finalmente a última parte, *sumperasma*, retorna o enunciado e diz: portanto, foi provado que etc. e re-enuncia a proposição. Então, na parte da construção, por todo o livro, o único tempo verbal que é usado, e nós não temos em português, é o imperativo perfeito passivo. Imperativo porque ele dá ordens, ligar dois pontos, traçar uma paralela a uma reta dada, dá ordens. O passivo, na minha concepção, é porque os objetos matemáticos é que estão sofrendo ação, comandada por ele, o fato de serem os dois pontos ligados, o fato de ser traçada a reta paralela, então, os objetos matemáticos estão sofrendo a ação. E por que o perfeito? O perfeito, em grego, significa que a ação foi concluída e que se tem um resultado. E qual é o resultado da construção? É a figura. Então, quando começa a parte do teorema, a figura **foi** construída e ele começa a trabalhar com a figura para a quinta parte, *apodeixis*, para demonstrar que de fato o resultado é válido. Então, a figura é parte integrante da demonstração e é uma parte central da demonstração. Porque é a quinta parte, vamos dizer, a demonstração propriamente dita, a *apodeixis*, que, em grego, significa demonstração, é feita depois da construção e baseada na construção. Ela é a base.