UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA

Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento

Verilda Speridião Kluth

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo
Co-Orientador: Prof. Dr. Jairo José da Silva

Tese de doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do título de doutora em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2005

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica

Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira

Profa. Dra. Maria Inês Fini

Prof. Dr. Rômulo Campos Lins

Verilda Speridião Kluth

Rio Claro, 24 de fevereiro de 2005

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese a meus pais:

José Speridião

Ignez Bonora Speridião

AGRADECIMENTOS

No silêncio cotidiano das palavras
presença de compreensão

Nas falas
ausência de cobrança

No fazer das obrigações familiares
divisão

Tudo, expressão de amor.

No mergulho, em mares matemáticos estranhos
fungierender Mut – coragem produtiva

Nos *gestos* indicadores de direção
paciência confiante

Na orientação
amizade

Nas constatações filosóficas, históricas e matemáticas
firmeza

Na co-orientação
respeito

Nas aulas de Álgebra
competência e conhecimento

Na insistência examinadora
abertura à percepção *objetivante* do movimento

Meus agradecimentos a

Wolfgang Wilhelm Kluth
Betina Kluth
Tatjana Kluth
Fabian Kluth

Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo
Prof. Dr. Jairo José da Silva
Prof. Dr. Irineu Bicudo
Profa. Dra. Vilma Speridião da Silva
Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira
Prof. Dr. Silvio Donizetti de Oliveira Gallo
Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
Prof. Dr. Rômulo Campos Lins
Profa. Dra. Maria Inês Fini

SUMÁRIO

ÍNDICE

RESUMO

ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA

Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento

A investigação enfoca a interrogação *como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra*.

Os procedimentos considerados apropriados para essa investigação, após exaustiva análise, foram pautados na hermenêutica filosófica. Essa modalidade de pesquisa qualitativa fenomenológica aponta como significativa uma análise encaminhada segundo um movimento dialético possibilitado pela estrutura da pergunta e da resposta. Respostas conduzidas por análises fenomenológicas de obras relevantes de autores considerados importantes na ciência do mundo ocidental, mais especificamente nas regiões de inquérito da História da Matemática, Filosofia da Matemática, Matemática, Educação, Educação Matemática e Filosofia. O movimento da construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* foi colocado em *epoché*. Essa análise contribuiu para com a construção do denominado *texto-solo*.

O *texto-solo* é construído mediante a articulação de atividades matemáticas presentes na construção/produção das *estruturas da Álgebra*. Essas atividades foram organizadas de modo retroativo durante a pesquisa realizada, partindo do momento presente em direção ao circunstancial propulsor das *estruturas da Álgebra*. Esse texto é o solo de um segundo momento de análise que busca compreendê-lo expondo o movimento dialético que se dá na estrutura das perguntas e respostas que conduzem toda a investigação.

Da articulação dessas perguntas e respostas chegou-se a três *categorias abertas*: *Os modos de doação das estruturas da Álgebra*, *As estruturas das presenças – estruturas da Álgebra-ser humano* e *O modo de ser matemático do ser humano*. A análise das *categorias abertas* revelou características essenciais das *estruturas da Álgebra* e o pensar que se dá como *cógito fenomenológico* no movimento da construção de seu conhecimento.

Da clareira que se fez, ao vislumbrar-se esse *cógito fenomenológico* e ao direcionar esse entendimento para o fazer do professor de Matemática, abriu-se a possibilidade de uma Pedagogia que assume a postura fenomenológica tanto no que diz respeito às relações de pessoas e instituições como no que diz respeito à construção do conhecimento humano de mundo.

Palavras-Chaves: Hermenêutica, Cógito Fenomenológico, Pedagogia Fenomenológica e Filosofia da Educação Matemática

ABSTRACT

Phenomenological Investigation of the Construction of Knowledge Regarding Structures of Algebra

This study focused on the question, *How is thinking revealed in the movement of the construction of knowledge about structures of algebra?*

The procedures considered to be most appropriate for this study, after exhaustive analysis, were based on philosophical hermeneutics. This phenomenological, qualitative research approach emphasizes the meaningfulness of an analysis that follows a dialectic movement, made possible by the structure of the question and the response - responses guided by phenomenological analyses of the relevant works of authors considered to be important in science in the Western world, specifically in the fields of Mathematics History, Philosophy of Mathematics, Mathematics, Education, Mathematics Education, and Philosophy. The movement of the construction of knowledge of *structures of algebra* was placed in *epoché*. The analysis contributed to the construction of the so-called *grounded text*.

The grounded text is constructed through the articulation of mathematical activities present in the construction/production of *structures of algebra*. These activities were organized in a retroactive manner during the study, beginning with the present moment and moving in the direction of the circumstantial propeller of the *structures of algebra*. This text is the soil of a second moment of analysis that seeks to understand it, exposing the dialectic movement that takes place in the structure of the questions and responses that guide the entire investigation.

Through the articulation of these questions and responses, we arrived at three *open categories: the modes of donation of the structures of algebra; the structures of the presences – structures of algebra-human being*; *and the mathematical way of being of the human being*. The analysis of the open categories revealed essential characteristics of the *structures of algebra* and the thinking that occurs as *phenomenological cogitation* in the movement of the construction of knowledge about them.

From the clearing that is created, upon shedding light on this phenomenological cogitation, and directing this understanding to the practice of the mathematics teacher, possibilities were opened up for a pedagogical approach that assumes a phenomenological posture, with respect to the relations between people and institutions, as well as the construction of human knowledge in the world.

Key-words: Hermeneutics, Phenomenological Cogitation, Phenomenological Pedagogy and Philosophy of Mathematics Education.

ZUSAMMENFASSUNG

ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

phänomenologische Untersuchung ihres Erkenntnisaufbaus

Bei der vorliegenden Untersuchung geht es um die Frage, wie sich das Denken in der Bewegung des Aufbaus der Erkenntnis der algebraischen Strukturen offenbart.

Nach umfassender Analyse wurde als für diese Untersuchung angebrachtes Vorgehen die philosophische Hermeneutik angesehen. Diese Art qualitativer phänomenologischer Untersuchung weist als signifikant eine Analyse aus, die im Sinne einer dialektischen Bewegung durch die Frage- und Antwortstruktur ermöglicht wird. Die Antworten stützen sich dabei auf phänomenologische Analysen bedeutender Werke von in der westlichen Welt allgemein anerkannten Wissenschaftlern, mit besonderer Berücksichtigung derer, die ihre Untersuchungen auf Gebiete wie Geschichte der Mathematik, Philosophie der Mathematik, Mathematik, Erziehung, Mathematik-Erziehung und Philosophie gerichtet haben. Die Bewegung des Aufbaus der Erkenntnis der *algebraischen Strukturen* wurde dabei von einer *Epoché*-Haltung begleitet. Diese Analyse trug zur Erstellung eines so genannten *Grund-Textes* bei.

Der Grund-Text geht aus der Artikulation mathematischer Aktivitäten hervor, wie sie im Aufbau bzw. in der Erstellung *algebraischer Strukturen* anzutreffen sind. Diese Aktivitäten wurden während der Forschungsarbeit rückwirkend organisiert, d.h. ausgehend vom gegenwärtigen Moment verlief die Untersuchung in Richtung auf den Antriebsumstand der *algebraischen Strukturen* zu. Dieser Text bildet die Grundlage eines zweiten Untersuchungsmoments, der jenen zu verstehen versucht, indem er die dialektische Bewegung herausstellt, die in der die ganze Untersuchung bestimmenden Struktur von Fragen und Antworten zum Ausdruck kommt.

Aus der Artikulierung dieser Fragen und Antworten ergaben sich drei offene Kategorien: Die Arten und Weisen des Gegebenseins algebraischer Strukturen; die Strukturen der Vergegenwärtigung – Strukturen der Algebra

im Menschen; und die mathematische Seinsweise des Menschen. Die Untersuchung der offenen Kategorien brachte wesentliche Grundzüge der algebraischen Strukturen und des Denkvorgangs an den Tag, der sich als phänomenologisches Cogito in der Bewegung des Aufbaus seiner Erkenntnis erweist.

Mit der aus der Andeutung dieses *phänomenologischen Cogito* und aus der Ausrichtung dieses Verständnisses auf das Tun des Mathematiklehrers entstandenen Lichtung eröffnete sich die Möglichkeit einer Pädagogik, die die phänomenologische Haltung sowohl hinsichtlich der Beziehungen zwischen Menschen und Institutionen als auch im Zusammenhang mit dem Aufbau der menschlichen Weltkenntnis anwendet.

Schlüsselwörter: Hermeneutik, Phänomenologischer Cogito, Phänomenologische Pädagogik und Philosophie der Mathematik-Erziehung

Capítulo I

INTRODUÇÃO

A ESTRADA NÃO PERCORRIDA

Duas estradas bifurcavam-se num bosque dourado,
E triste por não poder percorrer ambas,
Sendo viajante, muito tempo permaneci ali
Contemplando uma delas, tanto quanto pude,
Até que ela se dobrou na curva encoberta por arbustos.

Então, tomei a outra da mesma forma,
Certo de que estaria fazendo tão boa escolha
Porque era gramada e desejava ser usada;
Ainda que por trilhar a estrada
Esta já se iria desgastar.

E ambas, igualmente, naquela manhã ali.
As folhas não haviam sido pisadas por passo algum.
Ah! então, deixei a primeira para um outro dia!
Sabendo, porém, como um caminho leva para outros caminhos,
Duvidei se algum dia voltaria.

Disse tudo isso com um suspiro
Pois anos após, então,
Duas estradas bifurcavam-se num bosque e Eu,
Eu percorri aquela menos usada.

Esta foi a diferença!

Robert Frost (tradução livre)[1]

Se é que a introdução de uma tese de doutorado tem que cumprir o papel de início do trabalho, que seja esta introdução o início da compreensão do caminho que será percorrido e, que ao ser percorrido, constrói-se.

A compreensão do caminho deve ser entendida como o ato de apoderar-se da intenção total que deve ir além da subjetividade de um pesquisador que interroga, permitindo enfocar a maneira do interrogado expressar-se em perspectivas, olhadas nas possíveis formas de vivências daquele que interroga ao estar com os outros.

Para esclarecer o que identifica o caminho, que ora se inicia, será descrita a construção da interrogação, como fruto das vivências da pesquisadora junto aos seus companheiros de pesquisa, próximos e distantes. Também serão explicitados os aspectos filosófico-científicos dessa interrogação, pois é ela que contribui com a construção do caminho.

1. A CONSTRUÇÃO DA INTERROGAÇÃO

> Mesmo que a fonte seja desconhecida, ainda assim o regato flui.
>
> Poincaré

Em 1997 terminava o meu primeiro trabalho[2] sobre a construção do conhecimento matemático abordada numa perspectiva fenomenológica merleau-pontiana. Esse trabalho esclareceu-me algumas características da Matemática e de sua construção, sobre as quais teço alguns comentários. A Matemática, matizada pelas idéias de MERLEAU-PONTY, mostrou-se como sendo um objeto cultural, no sentido de que ela é um objeto construído pelo processo civilizatório. Isto quer dizer que a Matemática é *no* e *do* horizonte social.

Assim compreendida, a Matemática se torna uma expressão viva do mundo cultural, pois a civilização em que está inserida se manifesta também pelos objetos culturais e a construção do objeto cultural *matemática* está na coexistência de consciências e unidades intersensoriais que compõem a significação intersubjetiva da experiência do fenômeno matemática.

---

[1] MARTINS, Joel. *Um enfoque fenomenológico do currículo: Educação como Poíesis*. Org: Vitória Helena Cunha Espósito. São Paulo: Cortez, 1992, p. 90.
[2] KLUTH, Verilda Speridião. *O que acontece no encontro sujeito-matemática?* Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 1997.

A significação intersubjetiva, por existir na coexistência, está presente na compreensão de cada sujeito que compõe um polo dessa relação intersubjetiva e que desenvolve o percebido em modalidades de compreensão, interpretação e comunicação. Esses desdobramentos enraizados no solo histórico-cultural possibilitam a idealização e a construção *com sentido* dos objetos culturais. Esse movimento de significação, desdobramentos, idealização e construção com sentido é que possibilita ao objeto cultural *matemática* seu caráter de universalidade.

A significação intersubjetiva por ser expressa segundo a compreensão/interpretação de uma pessoa ou de um determinado grupo de pessoas pode ser retomada por outros. Se assim não o fosse, qual seria a razão do ato de ensinar Matemática se ela não trouxesse em seu bojo a possibilidade de compreensão/interpretação? Ou ainda, qual seria a razão de ser das investigações históricas e antropológicas que se dão mediante objetos culturais?

Dizer da elaboração do percebido enquanto construção dos objetos culturais é assumir a percepção como primado do conhecimento. À percepção atribuí MERLEAU-PONTY o status de *logos* em estado nascente, pois ela comporta os princípios da imanência e da transcendência.

> Imanência, posto que o percebido não poderia ser estranho àquele que percebe; transcendência, posto que comporta sempre um além do que está imediatamente dado.[3]

Esses princípios se dão na relação homem-mundo. Uma relação fundante e intencional que, quando descrita pela fenomenologia, vai além da afirmação: *toda consciência é consciência de algo*. Para MERLEAU-PONTY essa afirmação não é nova, ela já estava presente no trabalho de KANT intitulado *Refutação do Idealismo*. Ao tomar-se aqui a relação intencional homem-mundo como fundante

> Trata-se de reconhecer a própria consciência como projeto do mundo, destinada a um mundo que ela não abarca nem possui, mas em direção ao qual ela não cessa de se dirigir – e o mundo

[3] MERLEAU-PONTY, Maurice. *O primado da percepção e suas conseqüências filosóficas*. Trad. Constança Marcondes Cesar. Campinas: papirus. 1990, p. 48.

> como este indivíduo pré-objetivo cuja unidade imperiosa prescreve à consciência a sua meta.[4]

Essa citação de Merleau-Ponty nos esclarece a afirmação *não há homem sem mundo e nem mundo sem homem*, pois toma a consciência como uma região originária da relação homem-mundo a qual possibilita a construção do objetivo por intermédio do intersubjetivo e respectivas expressões de compreensões, construindo os objetos culturais e, entre eles, a Matemática.

A experiência da realização do mestrado foi-me muito valiosa, porque pude viver um distanciamento das questões que surgem na sala de aula, ao buscar uma compreensão da Matemática e de sua construção no âmbito da Filosofia e da Filosofia da Educação. Porém, esse distanciamento mostrou-se, ao final do trabalho, como sendo uma aproximação realizadora, pois a compreensão tecida sobre a Matemática e sobre a sua construção, acrescida de outros estudos fenomenológicos que tratam desses assuntos, foi sendo traduzida por mim, nos anos subseqüentes, em atividades de ensino para sala de aula que tratam de conteúdos da Matemática focando-os no primado de sua construção e tomando como fundante a vivência do corpo-próprio.[5]

Encontrava-me nesse momento, numa posição diferente daquela descrita na frase de Poincaré, citada na abertura deste texto. Metaforicamente falando *A fonte do conhecimento matemático tornava-se cada vez mais clara para mim*. O que agora parecia-me obscuro é o *curso do regato*, isto é, o conhecimento matemático constituído que flui e que, ao fluir, não diz mais só da *fonte*, pois se deixa modelar pelas encostas e embelezar pelas características geográficas do terreno, influenciando-o, modificando-o e deixando-se modificar.

Assim, mal havia esclarecido algumas dúvidas sobre a construção do conhecimento matemático e já se fazia presente, embora camuflada, a nova pergunta que apontava para uma questão geral: como acontece a construção do conhecimento matemático formal? Embora latente, ou seja, não formulada

---

[4] MERLEAU-PONTY, Maurice. *Fenomenologia da Percepção*. Trad. Carlos Alberto Ribeiro Moura. São Paulo: Martins fontes, 1994, p. 16.

[5] Corpo-próprio é a origem zero de um ponto de vista que dá uma determinada orientação ao sistema de experiência. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *A contribuição da fenomenologia à educação*. In: BICUDO & CAPPELLETTI (Orgs). *Fenomenologia uma visão abrangente da Educação*. São Paulo: Olho dágua, 1999, p. 37.

em linguagem proposicional, a pergunta incomodava-me e impelia-me à busca.

Na época, interessei-me pela obra de BORNHEIM - *Filosofar - O pensamento filosófico em bases existenciais*[6]. Nessa obra, pude perceber o filosofar como um acontecer constituído de complexas etapas que se articulam e que têm um primado descrito como comportamento originante, a *atitude admirativa*. Esta *atitude* é entendida como a vivência de uma significação positiva e afirmativa do mundo, aquela que possibilita a vivência do real.

Nesta fase da leitura faz-se presente uma certa identificação entre o filosofar entendido como um *fazer filosofia* e a construção do conhecimento matemático entendido como um *fazer matemática*, pois ambos podem ser compreendidos como tendo um primado, um solo originário. A partir daí assumi a obra, não mais só por interesse, mas como um possível horizonte de busca à pergunta latente.

Segundo BORNHEIM, a *atitude admirativa* caracteriza-se pelos seus aspectos dogmáticos, pois há uma abertura, não crítica, de aceitação, que acolhe o mundo como ele se mostra. Além disso, dá-se uma nitidez entre o eu e o outro, solo propício para a configuração de diferenças e do surgimento da distância, elementos esses constituídos por atos conscientes, que inevitavelmente vão compor numa outra etapa, a *experiência negativa*.

Conforme o autor, essa *experiência negativa*, enraizada no egocentrismo, nos afasta da *realeza* do mundo dada na *atitude admirativa*. Alguma coisa dada na *admiração* perde-se de vista na *experiência negativa* fazendo surgir dúvidas sobre ela. Na *experiência negativa*, o filosofar perde sua característica de *relação*. Consciência, nessa etapa, é só separação. Mas é a própria *experiência da separação* que possibilita a abertura de horizonte para a reconquista do mundo. Esta reconquista só é possível quando se ultrapassa a *experiência negativa,* vencendo o egocentrismo que torna o homem prisioneiro de seu próprio inferno, limitando-se à sua particularidade.

> E o único caminho para vencer essa prisão radica-se num ato de conversão espiritual, numa autêntica metanóia, no sentido

[6] BORNHEIM, Gerd A. *Introdução ao Filosofar – O pensamento filosófico em bases existenciais*. São Paulo: Globo, 1998.

> de estabelecer-se uma abertura para a realidade, superadora de toda experiência negativa, descentralizadora do egocentrismo.[7]

A *experiência negativa* é, portanto, uma etapa a ser superada. É preciso reassumir a realidade pelo processo da negação da negação, isto é, a *conversão* reafirmadora da realidade. O homem é chamado à sua plena responsabilidade. A realidade não é mais uma realidade dada, nos moldes da postura dogmática, da pura apropriação do real, mas sim, uma realidade coerentemente conquistada.

> Tudo deve ser reconquistado, e esta exigência de reconquista vai determinar o novo sentido, próprio do filosófico, de relacionar-se ao real: *o sentido crítico, problematizador, que distingue a pergunta filosófica.* [8]

Entendo que a reconquista do mundo, como descrita por BORNHEIM, não possa se dar a partir de categorias analíticas pré-estabelecidas que se voltam reflexivamente ao que foi dado na *atitude admirativa* e depois, duvidado na *experiência negativa*. Ao contrário disto, é preciso que se encontre na própria *experiência negativa* uma direção que reconduza ao que foi dado na *atitude admirativa*. Segundo o autor, essa direção é orientada pela pergunta filosófica que traz consigo o sentido crítico e problematizador.

Esta obra trouxe-me um sopro de esperança. Deveria ser possível, como ocorre com o pensamento filosófico, explicitar o conhecimento matemático do pré-reflexivo ao reflexivo ou do pré-predicativo ao predicativo como um regato que flui, que deixa-se permear, mas que, apesar de tudo, ainda *sabe de sua fonte,* como foi feito com a Filosofia na descrição do filosofar.

Segundo BICUDO

> Conhecimento pré-predicativo, ou pré-reflexivo ou ante-predicativo são expressões usadas por Merleau-Ponty para dizer da compreensão existencial que ainda não foi tematizada e desdobrada em ações de análise e reflexão. Diz de uma

[7] *Idem*, *ibidem*, p. 108.
[8] *Idem*, *ibidem*, p. 126.

compreensão apenas manifesta ao próprio sujeito e ao outro de maneira não proposicional.[9]

O predicativo expressa compreensão elaborada numa linguagem proposicional abrangendo, portanto, o sentido percebido pelo sujeito, os significados atribuídos e aqueles disponíveis histórico-culturalmente.

Ao vislumbrar a semelhança entre a Filosofia e a Matemática mediante as idéias aqui expostas, entendi que havia um *salto de compreensão* sobre a construção do conhecimento matemático a ser dado, semelhante àquele da *conversão filosófica.*

Seria preciso sair da postura dogmática assumida frente ao conhecimento matemático instituído, colocá-lo em dúvida, perder vínculos estabelecidos, pois a vivência da separação ao ser superada permite a abertura para as evidências e seus desdobramentos lingüísticos culturais que formam ou compõem ou constituem a região de inquérito designada histórico-culturalmente *matemática*. A *superação* passou a fazer parte das minhas preocupações.

Em 2001, freqüentei o curso de Filosofia da Matemática, no qual tive a oportunidade de refletir sobre Matemática sob a visão de vários filósofos. Esse curso descortinou-me um modo novo de abordar essa ciência e, também, a posicionar histórico-filosoficamente os conhecimentos que eu havia construído.

Até então, esse movimento de superação do dado, tomado aqui como a Matemática instituída cientificamente, era efetuado na trilha da abertura que textos/obras de autores fenomenológicos da Filosofia da Educação me permitiam. A partir de então, minha compreensão abriu-se com a leitura de outros filósofos como PLATÃO, ARISTÓTELES, DESCARTES e KANT, assim como: LEIBNIZ, FREGE, WEYL e muitos outros.

Pude ver minhas preocupações educacionais alinhadas à Filosofia da Matemática e, principalmente, à Filosofia da Matemática Husserliana, que se mostrou em sintonia com o que eu buscava, embora ainda como uma pergunta

---

[9] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *O pré-predicativo na construção do conhecimento geométrico*. In: BICUDO & BORBA (Orgs). *Educação matemática pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004, p. 80.

latente: como acontece a construção do conhecimento matemático formal, não se perdendo de vista o conhecimento científico que *ainda sabe de sua fonte*?

Embora houvesse ampliado o campo de leitura e interpretação sobre a Matemática, ainda assim, a interrogação não se punha proposicionalmente. Foi preciso vivenciar situações de sala de aula para que a pergunta latente encontrasse terreno fértil para assumir a forma de interrogação.

Como professora das disciplinas de Álgebra Abstrata e de Educação Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática, pude notar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos. Primeiro, aquelas que se referem ao entendimento de conceitos algébricos fundamentais como: o que vem a ser uma variável? Como se referir a uma operação matemática caso não esteja definida a sua lei de composição? O que é isto: uma operação qualquer? O que é isto: operações definidas em um conjunto, com determinadas propriedades definindo uma estrutura? Qual é a matéria desta estrutura? Onde está sua concretude? Em segundo lugar, as dificuldades relativas ao destaque das idéias principais de textos e a compreensão dos eixos de interpretação colocados pelo escritor como guias para fazer-se entendido pelo leitor, quer seja tratando-se de textos matemáticos, na intenção de apresentar uma demonstração matemática ou de definir um objeto matemático, quer seja tratando-se de textos da Educação Matemática, na intenção de suscitar interpretações. Além disso, os alunos mostravam-se com dificuldades de perceber os elementos que organizam e compõem uma teoria.

Em resumo, os alunos apresentavam uma dificuldade muito grande "em entrar no texto", ou melhor dizendo, em apropriar-se da articulação do texto e interpretá-lo. Dava-me a impressão de que as palavras e os símbolos não os tocavam, não os afetavam e que eles se sentiam muito mal com isso, como se estivessem mutilados, desprovidos de algo que lhes era familiar. O que quero dizer é que os alunos davam a impressão de terem consciência de que o que estava sendo dito não era ouvido. Sentiam a presença do *outro lado da paisagem*, mas não enxergavam a ponte para sua passagem.

Embora as dificuldades dos alunos constituissem, para mim, como professora, uma grande preocupação que me levava a reformular constantemente as aulas, a buscar alternativas tanto teóricas quanto práticas, a *bisbilhotar* novas bibliografias, não eram elas que me moviam como pesquisadora. As dificuldades são barreiras que se apresentam a todo ser humano sob diversas maneiras e em diversos contextos. Elas podem sim, ao serem superadas, exercerem o papel de alavanca na construção do conhecimento, fortificando-nos.

As dificuldades dos alunos colocavam-me “cara a cara” com a minha indagação, ou seja, como acontece a superação da *experiência negativa* no processo da construção do conhecimento da Matemática. Percebi-me na perplexidade. Essa constatação iluminou uma possível região de inquérito coerente com a pergunta latente. A região se abriu para que explicitações sobre o modo de a superação *se dar* fossem expressas predicativamente, ou seja, em um modo de pensar já reflexivo.

Coloca-se, assim, o pano de fundo revelador do foco da minha perplexidade: dá-se a *admiração*. Vivo o sentido de abertura, aquele que nos afasta do pessimismo ingênuo, que nos cega, levando-nos a crer que *nada há de novo sob o sol*, que constrói um comportamento negativo diante da realidade. Ao contrário disto, o *sentido de abertura* revelou-se-me em uma atitude receptiva, de disponibilidade, de simpatia. Na *atitude da admiração* não há abismos.

> Quem admira não se dissolve na realidade que admira, nem esta se desfaz naquele. Pois, bem ao contrário, o que caracteriza a admiração é o reconhecimento do outro como outro, e porque eu o reconheço enquanto tal posso admirar-me. Não se trata de confusão, e sim de um respeito cujas raízes mergulham em uma inocência ingênua e piedosa. [10]

Entendo, então, que a *admiração ingênua* como afirmação do outro, do diferente como diferente, revela uma outra característica: a presença de atos de consciência que se distinguem da experiência do *pasmo*, que se revela como um perder-se de si mesmo ou da experiência da *surpresa*, que desarma e descontrola. O *pasmo* e a *surpresa*, assim como a *admiração*, estão, segundo BORNHEIM, ligados ao primeiro despertar da vida consciente, porém os dois primeiros referem-se tanto a um significado positivo quanto negativo,

[10] BORNHEIM, Gerd A. *Introdução ao Filosofar – O pensamento filosófico em bases existenciais*. *Op. cit.*, p. 40.

enquanto a *admiração* refere-se exclusivamente ao que tem uma significação positiva, afirmativa.

Foi preciso a vivência da *admiração* para que minha perplexidade se expusesse, constituindo o ambiente propício para sua formulação. Minha perplexidade, pontuando o contexto em que se instalou claramente para mim, mostrava-se em relação ao fato de a Álgebra revelar-se compreensível para alguns e inatingível para outros. Isto levou-me a questionar *O que aconteceu com aqueles que construíram a Álgebra Abstrata?* Penso que deveriam ver com clareza suas evidências algébricas. Deveria entender que os acontecimentos da superação da *experiência negativa* são momentos especiais para pessoas especiais? Ou, ainda de modo mais restrito, há momentos exclusivos para pessoas exclusivas?

As informações a respeito da construção do conhecimento algébrico que circulam nos mais variados meios de comunicação, quer seja no meio acadêmico-científico da Matemática e da Educação ou até mesmo nos diálogos informais, na sala dos professores, levaram-me a conjeturar qual seria o sentido de abstração na construção/produção da álgebra abstrata. É certo que aqui estou frente à Matemática entendida como corpo de conhecimento veiculado e validado na civilização do mundo ocidental.

O complexo formado pelas constatações expostas, quando assumido em sua positividade, sugere perguntas como: de que abstração falamos quando falamos de Álgebra Abstrata? Existem diferentes modos de abstração no processo de construção da Álgebra Abstrata? Esse processo não seria somente aquele concernente ao próprio movimento do pensar que se desenrola em torno de percepção, abstração, nomeação e tantos outros atos?

Todas estas perguntas, frutos da articulação e da reflexão de vivências e de estudos sobre Matemática, Filosofia da Matemática e História da Álgebra[11] e mais precisamente da Álgebra Abstrata, aquela que trata das estruturas

---

[11]Ver parte deste estudo em: KLUTH, Verilda Speridião. *Pesquisando a construção do conhecimento algébrico: um mergulho na história*. Anais do V Seminário de História da Matemática, UNESP, Rio Claro, 2003.

algébricas[12], constroem a interrogação dessa tese: *como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra?*

Tendo essa interrogação como norte, minha caminhada vai em direção à superação da *experiência negativa*, na construção/produção[13] do conhecimento das estruturas da Álgebra.

Percebo que meu foco é aquela *superação*. Intencionalmente, busco compreendê-la. Esse é o trabalho que proponho. Ao fundo, sempre está minha postura de educadora. As compreensões e insights que venha obter voltar-se-ão, certamente, para o trabalho de ensino e pesquisa em Educação Matemática.

Os alunos? Foram vitais para ver com clareza minha perplexidade. Os autores estudados também foram importantes para vislumbrar o caminho.

Agora, compete-me percorrê-lo. No final, espero encontrar a *clareira*, conforme a ela HEIDEGGER se refere. Ou seja, esclarecer o modo ou os modos pelos quais a *superação* na construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* ocorre.

2. A EXPLICITAÇÃO DA INTERROGAÇÃO

> O espírito crítico é pois, fundamentalmente, pergunta, e qualquer que seja a sua origem, a pergunta filosófica move-se sempre dentro de um profundo sentido afirmativo. A pergunta é a maneira de o filósofo permanecer aberto ao mistério.
>
> Gerd A Bornheim

Como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra? O sentido afirmativo da interrogação norteadora

[12] Ver parte deste estudo em: KLUTH, Verilda Speridião. Ensaio/Resenha: Modern algebra and The Rise of mathematical Strutures. Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 4, nº 7 (abril/2004 – setembro/2004).

[13] A construção é o processo mediante o qual o objetivo do conhecimento vai sendo clareado e construído. A produção envolve, de certo modo, esses aspectos e se detém no processo de materialização do produto. Ambos estão interligados. Conforme explicação de BICUDO, em sessão de orientação.

aflora já no primeiro movimento interpretativo. Ela toma como dadas, tanto a existência de *estruturas da álgebra* quanto a do pensar. A interrogação apodera-se de um conhecimento sobre Álgebra, assim como da possibilidade de um determinado modo de pensar, que constituirão o solo de investigação. É sobre esse solo que a investigação há que proceder. Portanto, há a necessidade de explicitar os significados de *estruturas da Álgebra* e do pensar e buscar ir além, efetuando a crítica.

O que são *estruturas da Álgebra*? Do ponto de vista científico, não há dúvidas de que a Matemática, essa da ciência do mundo ocidental, é a área responsável pelo estudo das estruturas da Álgebra, colocando à disposição dados para a compreensão de sua razão de ser. A fim de manter a coerência no espaço definidor da interrogação norteadora é, pois, nos textos da ciência Matemática que se inicia o movimento de significação.

A apresentação das *estruturas da Álgebra* nos livros de Matemática dá-se por meio de definições. Espera-se que, lendo-as e possuindo um prévio conhecimento de outras definições e teoremas, os significados das *estruturas da Álgebra* possam vir à tona, como uma articulação de resultados plenos de sentido matemático, dos quais possam ser deduzidas asserções que constituirão a teoria num processo lógico-dedutivo, caracterizando-se como o estudo das estruturas. Esse é o movimento do pensar que se mostra na construção do conhecimento das *estruturas da álgebra* nos livros de Álgebra em geral e, em particular, no livro que vinha sendo adotado no programa da disciplina de Álgebra Abstrata que eu ministrava.

O procedimento de apresentação utilizado pelos autores que escrevem os textos dirigidos a possíveis aulas inicia-se com a explicação de uma definição, seguida de alguns exemplos numéricos ou não numéricos e, posteriormente, outros encaminhamentos teóricos.

Um exemplo de apresentação:

> Grupo
>
> Definição: Seja G um conjunto não-vazio e $(x,y)\mapsto x*y$ uma lei de composição interna em G. Dizemos que G é um grupo em relação a essa lei se, e somente se,
> a) $a*(b*c)=(a*b)*c, \forall a,b,c \in G$, isto é, vale a propriedade associativa;

b) existe $e \in G$ de maneira que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$, ou seja, existe elemento neutro;
c) todo elemento de G é simetrisável em relação à lei considerada: $\forall a \in G, \exists a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.

Às vezes, por simplificação de linguagem, diz-se apenas "G é um grupo" ou fala-se "grupo G ", o que pressupõe, evidentemente, uma lei de composição interna em G (com as propriedades citadas) sobre a qual não há nenhuma dúvida. [14]

Um exemplo numérico: É fácil verificar que G = {1, -1} é um grupo em relação à multiplicação usual. Pois G é um conjunto não-vazio, a multiplicação está definida em G, vale a associativa, existe $1 \in G$ tal que $\forall a \in G, a \cdot 1 = 1.a = a$ e $\forall a \in G, \exists a' \in G$ tal que $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$. Por se tratar de um conjunto finito algumas dessas propriedades podem ser facilmente visualizadas na tabela a seguir.

.	1	-1
1	1.1 = 1	1.(-1) = (-1)
-1	(-1).1 = (-1)	(-1).(-1) = 1

Uma leitura cuidadosa dessa apresentação leva-nos a perceber uma certa ambigüidade, pois ao se definir o grupo, tomou-se um conjunto não vazio, uma lei de composição interna e três propriedades operacionais válidas nesse conjunto e, ao mesmo tempo, por uma simplificação de linguagem, é afirmado que o conjunto G com essas condições é um grupo. Essa apresentação pode dar margens a dúvidas expressas na pergunta: O grupo é o próprio conjunto?

A definição de grupo é tratada de maneira um pouco diferente por HERNSTEIN em seu livro Tópicos de Álgebra[15]. Ele coloca essa definição interligada, quase como uma conseqüência, ao estudo das composições de funções no conjunto de aplicações bijetoras A(S) de um conjunto S. Para ele, um conjunto G *forma* um grupo.

---

[14] DOMINGUES, Hygino H. & IEZZI, Gelson. *Álgebra Moderna*. 3ª ed., 2ª reimpr. São Paulo: Atual, 1982, p. 77.
[15] HERSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra*. Trad. Adalberto P. Bergamasco & L. H. Jacy Monteiro. São Paulo: Polígono, 1964, p. 30.

> Definição: Diz-se que um conjunto G de elementos,não vazio, forma um grupo se em G está definida uma operação binária, denominada multiplicação e indicada por tal que: (1) $a,b \in G$ implica que $a \cdot b \in G$ (fechamento) (2) $a,b,c \in G$ implica que $a \cdot (b \cdot c) = (a.b).c$ (lei associativa) (3) Existe um elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$ (existência de um elemento unidade em G) (4) Para todo $a \in G$ existe um elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (existência de inversos em G)[16]

Apesar do autor evidenciar, na apresentação de seu livro, a idéia de que *grupo* é um sistema de uma operação, de usar o verbo *formar* em vez do verbo *ser* como o faz DOMINGUES e citar o teorema de Cayley[17], ao definir grupo abeliano[18] denomina o grupo formado pelo conjunto, com a mesma letra usada para designar o conjunto. Nesta apresentação percebe-se também uma ambigüidade expressa na possibilidade da pergunta: *Grupo é um sistema de uma operação ou é o próprio conjunto?*

No livro de MAC LANE intitulado Mathematics Form and Function[19], encontra-se a seguinte definição de grupo:

> Um grupo é um conjunto G equipado de três regras:
> (i) Uma regra atribuindo a quaisquer dois elementos s, t de G um elemento st, chamado seu produto, tal que o produto é associativo, r(st) = (rs)t, todo r, s, t em G.
> (ii) Uma regra determinando um elemento e (a unidade, às vezes escrito como e = 1) de G tal que, para todo t em G, te = t
> (iii) Uma regra atribuindo a cada t em G um elemento t^{-1} em G tal que $tt^{-1} = e$.[20]

MAC LANE afirma que essa definição de grupo pode ser vista como uma definição de um grupo "abstrato" quando o G for um conjunto de

---

[16] I*dem*, *ibidem,* p. 31

[17] Teorema de Cayley: Todo grupo é isomorfo a um subgrupo de A(S) para um S conveniente. *Idem, ibidem*, p. 73.

[18] Definição: todo grupo G é dito abeliano (ou comutativo) se para todo a,b pertencente a G, a . b = b . a . *Idem*, *ibidem*, p. 31.

[19] MAC LANE, Saunders. *Mathematics Form and Function*. New York: Springer Verlag, 1986.

[20] A group is a set G equipped with three rules, as follows: (i) A rule assigning to any two elements s, t of G on element st, called their product, such that the product is associative, r(st)=(rs)t, for all r,s, t in G. (ii) A rule assigning an element e (the unit, often written as

transformações, pois as transformações esquecem que transformam coisas e usam somente as propriedades da composição.

O autor exemplifica que um grupo de transformação é grupo e acrescenta que segundo o teorema de Cayley, a recíproca é verdadeira, todo grupo pode ser considerado como um grupo de transformação que é um sub-conjunto das aplicações de um conjunto.

Porém, as transformações não são as únicas origens de grupos, como visto no exemplo numérico dado acima: o conjunto G = {1, -1}. Neste caso, segundo a definição do autor, o G é um conjunto e G é um grupo. Além disto, o produto é comutativo portanto, G é um grupo abeliano.

Vê-se assim, que a ambigüidade levantada inicialmente, quando explicitada por MAC LANE, deixa vir à tona a complexidade dos processos que levam a resultados matemáticos, entendendo aqui a própria definição como um resultado matemático.

Implicitamente estabelecem-se analogias, provam-se equivalências, isomorfismos, criam-se procedimentos. As conquistas realizadas na Matemática se entrelaçam, produzindo um emaranhado de dependências, dando a impressão que seus resultados não aceitam uma outra ordenação e interpretação que não aquela da lógica-dedutiva que constrói sua teoria, pois cada conquista projeta-se sobre o conhecimento já construído e posto à disposição, dando-lhe novas dimensões teóricas.

Em decorrência deste modo de produzir conhecimento, as definições apresentadas permeiam e deixam-se permear pelos resultados de outros campos da Matemática, alargando seu espectro e dando margens para que sejam consideradas como da região algébrica, mas também como um objeto do corpo de conhecimento da Matemática como um todo.

Esse primeiro levantamento sobre uma *estrutura da Álgebra*, ainda que feito somente no âmbito do conhecimento da Matemática (da ciência do mundo ocidental) e na dimensão de uma literatura restrita a três livros de Matemática, explicita a importância de revelar-se a superação da *experiência negativa* no processo da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra, pois percebe-se que cada autor de livro faz uma escolha ao definir

---

e=1) of G such that, for all t in G. te=t. (iii) A rule assigning to each t in G an element t^{-1}

grupo. Os autores constroem explicações compactadas e, muitas vezes, são obrigados a deixar de revelar aspectos ou supô-los conhecidos e talvez mais do que isto, supô-los entendidos, criando regiões obscuras para aqueles que não estejam familiarizados com a Matemática.

Ao tomar-se as *estruturas da Álgebra* como tema dessa tese, não se pretende esclarecer a complexidade dos processos que levam a resultados matemáticos, nem tão pouco tem-se a pretensão de pensar o que o matemático pensou. Tem-se em mente algo mais simples. Pretende-se encontrar no corpo de conhecimento matemático, mais especificamente no corpo de conhecimento da Álgebra, uma direção que permita tecer um fio condutor composto de atividades matemáticas, de evidências, de idéias, de estratégias, de ocorrências que se mostrem tencionadas à construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*.

Numa linguagem metafórica, a tarefa a ser realizada pela pesquisa será um trabalho de mineiro que explora a mina *matemática* e que não tem a pretensão de explorar a mina toda, mas sim, encontrar um filão que expresse o movimento da construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* e que ao expressá-lo possibilite uma explicitação do pensar que nele se revela.

Em decorrência do exposto, a questão que se coloca nesse momento é: *o que significa pensar?*

A palavra *pensar* é usada no cotidiano em vários sentidos. Ela pode expressar a busca de alguma idéia, quando por exemplo alguém diz: *Ainda não sei como fazer isto. Estou pensando*.

A palavra *pensar*, além de expressar a busca de idéias ou soluções pode também ser colocada como algo voluntário e deliberado, quando se afirma por exemplo: *eu não fiz o exercício de física. Eu não queria pensar; Eu não sei o que vou fazer, e não quero pensar, agora, sobre isto.* Ou ainda: *Não me incomode, eu quero pensar*.

Existem também situações que contextuam o significado de *pensar* como uma forma de concentração que se relaciona com o estado físico da pessoa: *Eu fui mal na prova. Eu não conseguia pensar, eu estava com dor de cabeça.*

---

in G such that $tt^{-1}=e$. *Idem, ibidem*, p. 23.

Ou como um apelo amoroso de memória na letra da música: *Pense em mim, chore por mim, liga para mim. Não, não liga pra ele.*

E, certamente, existem muitos outros significados de *pensar* impregnados nos fazeres da cotidianidade que poderiam ser citados.

No dicionário da língua portuguesa[21] a palavra *pensar* significa: 1. Formar ou combinar no espírito pensamentos ou idéias; 2. Fazer reflexões; refletir, raciocinar; 3) reflexionar, meditar; cismar; 4) Fazer tensão, tencionar, cogitar; 5) estar preocupado, ter cuidado; 6) lembrar-se, imaginar; 7) avaliar pelo raciocínio, julgar; 8) tino, prudência. Alguns desses significados são imediatamente reconhecidos como próximos àqueles da cotidianidade. Porém, há aqueles que necessitam de maiores esclarecimentos, como por exemplo: formar ou combinar no espírito pensamentos ou idéias; fazer tensão, tencionar, cogitar, imaginar, julgar, tino, prudência.

Segundo uma pesquisa feita por CHAUI[22] a palavra *pensar* procede de um verbo latino, o verbo *pendere*, que significa ficar suspenso, suspender, pesar, examinar, ponderar. Nesse sentido de *pendere*, *pensar* é suspender o julgamento, comparar, avaliar, examinar e ponderar idéias e opiniões, caracterizando-se mais como uma atividade sobre idéias e opiniões já existentes do que como criação ou produção de um ponto de vista, de uma opinião ou do vislumbre de uma idéia.

A autora ainda afirma que nos textos filosóficos escritos em latim são empregados dois outros verbos para dizer *pensar*: *cogitare* e *intelligere*. *Cogitare* significa considerar atentamente e meditar. *Pensar*, nesse sentido, quer dizer colocar algo diante de si e considerá-lo atentamente. *Intelligere* significa colher entre, escolher entre, reunir entre vários. *Pensar* como *intelligere* significa aprender, compreender. *Pensar* como *cogitare* e *intelligere* aproxima-se das características de atos de produção e criação.

A busca pelos significados da palavra *pensar* revela dois modos de gerar pensamentos: aquele da articulação das idéias e opiniões já existentes e aquele da produção e criação de algo. *Pensar*, assim compreendido, significa tornar possível os pensamentos.

---

[21] Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa. 2ª edição. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.
[22] CHAUI, Marilena. *Convite à Filosofia*. São Paulo: Ática, 1994, p. 151-152.

Para HEIDEGGER, há dois tipos de pensamentos, "cada um justificado e necessário em seu próprio modo: o *pensamento calculador* e o *pensamento meditativo*."[23]

Para o autor, o *pensamento calculador* se dá quando conta-se com condições que são dadas e que são levadas em consideração com a intenção de servir-se delas para algum propósito específico, seja no ato de planejar, pesquisar ou organizar.

O *pensamento calculador* não está fundamentado necessariamente nos números. Esse pensamento se caracteriza muito mais pela atitude humana frente aos dados, do que com a natureza dos dados. O *pensamento calculador* nunca pára, ele ocorre de um prospecto para o seguinte. Ele nunca recolhe. O *pensamento meditativo* é reflexivo e busca compreensão. Ele não tem pressa, sabe aguardar sua oportunidade com a mesma singeleza que o agricultor espera o nascimento e amadurecimento da semente.

Assim, o *pensamento meditativo* não se presta para a realização de negócios e tem uma aparência de estar *acima* do alcance da compreensão comum. Porém, segundo HEIDEGGER o *pensamento meditativo* não precisa ter altas pretensões. A meditação pode ser sobre coisas da vida cotidiana ou sobre aquilo que chama a atenção humana. Cada pessoa segue o caminho do *pensamento meditativo* segundo seu modo de ser e de seus horizontes. Isto porque o homem é um ser pensante, um ser meditativo.

O autor adverte que, quando o homem coloca-se a mercê dos *pensamentos calculadores,* ele põe em risco a autoctonia de suas obras. Isto quer dizer que as obras humanas poderiam ganhar características imprevisíveis para os próprios seres humanos que a realizam, como por exemplo, as características que surgem das obras humanas geradas pela técnica. O autor afirma ainda que a revolução tecnológica

> /.../ poderia de tal modo fascinar, enfeitiçar, deslumbrar e iludir o homem que o *pensamento calculador* viesse, algum dia, a ser aceito e praticado como o único modo de pensar.[24]

---

[23]HEIDEGGER, Martim. *Um discurso comemorativo*. Trad. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Leopoldianvm – revista de Estudos e Comunicações. V X, nº 28, agosto 1983, p. 21.

HEIDEGGER não se coloca, em momento algum, contra a técnica e afirma ser uma miopia considerá-la do mal porém, proclama a necessidade de seu entendimento, pois ela impõe uma nova relação com as coisas da vida. Passa-se a encarar o mundo pelo seu lado técnico, causando um encobrimento das obras humanas e uma *debandada do pensar. A debandada do pensar* deve ser entendida no sentido de que o homem não está realizando por inteiro a *arte de pensar*. Para o autor a reconquista do *pensamento meditativo* significa uma abertura para a compreensão das características que advêm do *pensamento calculador* e uma busca à autoctonia das obras humanas. Na obra de HEIDEGGER

> A arte de pensar é dada por um modo extraordinário de sentir e escutar o silêncio do sentido, nos discursos das realizações. No pensamento não somos apenas enviados a remissões e referências. Não está na semântica ou na síntaxe a originalidade do pensamento. Uma paixão mais originária do que toda semântica ou qualquer sintaxe, a paixão do sentido, toma posse de nosso ser e nos faz viajar por dentro do próprio movimento de referir, de remeter, de enviar.[25]

Que modo é esse de *pensar* que propõe restaurar a autoctonia das obras humanas buscando seu sentido? Seria esse modo de *pensar* uma possibilidade de aproximar-me do modo de ser das *estruturas da Álgebra*? Seria esse modo de *pensar* uma possibilidade de restaurar a autoctonia as *estruturas Algébricas* conhecendo suas raízes enquanto objeto da Álgebra e no movimento de sua construção/produção? O que significa esse *pensar* quando entendido como *arte de pensar*?

A compreensão desse modo de *pensar* é buscada em aulas ministradas pelo filósofo Martin Heidegger no curso de inverno de 1951–52 e no curso de verão de 1952, na Universidade de Freiburg.

Para Heidegger, a questão *o que significa pensar?* é abordada na medida em que pensamos, e que para que esta investigação seja bem sucedida é necessário que estejamos dispostos a desenvolver o modo meditativo de pensar. Numa linguagem metafórica, aprender a pensar é como aprender a

---

[24] *Idem*, *ibidem*, p. 27.

[25] LEÃO, Emmanuel Carneiro. *Apresentação*. In: HEIDDEGER, Martim. *Ser e Tempo*. Trad. Márcia de Sá Cavalcante. 4ª ed. Petrópoles: vozes, 1993, p. 13.

nadar. Não se aprende a nadar conhecendo um tratado sobre nadar, só se aprende a nadar, nadando, saltando na correnteza da água e na correnteza permanecendo a salvo.

Porém, no momento em que nos entregamos ao aprendizado do *pensar*, afirmamos que estamos dispostos a aprender a pensar, ou seja, exercitar a *arte de pensar*. Isto quer dizer que *pensar* não é algo que possa ser comparado a um instrumental pronto e acessível, do qual conheço o manejo, do qual conheço a lógica e a organização.

> A razão, o ratio, desdobra-se no pensar. Como ser vivo racional, o homem precisa poder pensar, se ele quiser.[26]

Lembrando que o apelo de HEIDEGGER sobre o pensar é aquele de um *pensar* que também contempla *pensamentos meditativos* e assumindo a afirmação que a razão surge no *pensar* pode-se entender que o homem se realiza enquanto ser racional na medida em que consegue realizar a *arte de pensar*. *Arte* que se dá na medida em que o homem queira ficar com o apreendido, queira ouvir o apreendido, isto é, não soltá-lo da memória e fazer com que o apreendido permaneça em consideração possibilitando o desabrochar da razão.

O pensável dá-se ao *pensar* enquanto permaneçe em consideração na rede tecida pelos interesses, inter-esses, aqui entendidos como sendo ser, sob e entre as coisas, colocar-se no meio das coisas e permanecer junto a elas. Aprender significa fazer uma correspondência a tudo aquilo de essencial que nos foi adjudicado.

Quando se pergunta *o que significa pensar?* não se pode querer alcançar uma afirmação conceitual, nem tampouco uma definição do *pensar*, pois não se *pensa* sobre o *pensar*, permanece-se fora da reflexão que faz do *pensar* seu objeto.

> O pensar sobre o pensar desdobrou-se no ocidente como lógica. Ela trouxe um conhecimento particular sobre uma maneira particular de pensar. /.../ [27]

---

[26] "Die Vernunft, die ratio, entfaltet sich im Denken. Als das vernünftige Lebenswesen muß der Mensch denken können, wenn er will." HEIDEGGER, Martin. *Was heißt Denken?* Stuttgart: Reclam, 2001, p. 3.

Este frutífero conhecimento particular constituiu-se na chamada logística, que passa a ser considerada como a única forma possível de uma filosofia rigorosa, porque seus resultados e processos garantem uma utilidade segura na construção do mundo técnico. Esta filosofia do futuro assume o poder sobre o espírito (*der Geist*). A logística junta-se à Psicologia Moderna, à Psicoanálise e à Sociologia formando, como filosofia do futuro, uma união perfeita. Este discernimento não corresponde ao todo das realizações humanas. Assim, *aprender a pensar* não é perder-se em reflexões sobre o *pensar*. A luz que surge ao se *pensar* não vem da lanterna da reflexão. A luz é própria do todo enigmático que presta-se ao *pensar*. "O pensar pensa, quando ele corresponde à dúvida." [28]

HEIDEGGER chama a atenção para determinados julgamentos que são considerados corretos contanto que correspondam aos fatos. Para análise desses julgamentos, ele toma as representações e afirma que aceitamos como correta a representação que atende ao objeto representado, e acrescenta que "Há muito tempo iguala-se a exatidão da representação com a verdade, isto é, o ser da verdade determina-se da exatidão da representação." [29]

Existem situações em que temos uma representação exata. Por exemplo, se digo que hoje é domingo esta afirmação é correta caso ela direcione a representação na seqüência da semana e encontre o hoje como domingo. A seqüência é um sinalizador. Porém, existem situações nas quais não temos sinalizadores, como é o caso da identificação de uma árvore florida no campo. A nossa representação precisa fixar a direção no objeto. Caso o julgamento seja incorreto, ou seja, a árvore florida não seja identificada, não se tem a certeza do que não é verdadeiro. Pode ser que a árvore não esteja florida ou de que a representação da árvore florida não seja exata. Isto leva a perguntas: o que é a representação e aonde ela fica? Na cabeça? Na alma? Na consciência? Assim como surgem perguntas sobre a existência do mundo. A

---

[27] "Das Denken über das Denken hat sich im Abendland als 'Logik' entfaltet. Sie hat besondere Kenntnisse über eine besondere Art des Denkens zusammengebracht." *Idem*, *ibidem*, p. 16.

[28] "Das Denken denkt, wenn es dem Bedenklichsten entspricht." *Idem*, *ibidem*, p. 17.

[29] "Man setzt seit langem diese Richtigkeit des Vorstellens mit der Wahrheit gleich, d. h. man bestimmt das Wesen der Wahrheit aus der Richtigkeit des Vorstellens." *Idem*, *ibidem*, p. 23.

resposta que parece atender a todos os que da representação se ocuparam é a de que o mundo é o todo do real enquanto possa ser por nós representado. Isto leva a crer que *o mundo é a minha representação*. Segundo HEIDEGGER esta foi a tônica de todo o pensar dos séculos XIX e XX.

A afirmação *o mundo é a minha representação* foi tratada por Schopenhauer[30], em seu trabalho de 1818, *Die Welt als Wille und Vorstellung - O mundo como vontade e representação*, como sendo uma sentença que se iguala aos axiomas de Euclides, por ser uma afirmação que não pode ser entendida tão logo ouvida, pois ela trata da relação entre ideal e real, ela ata o mundo que está na cabeça na direção do mundo que está fora da cabeça e constitui o caráter distinto da filosofia da modernidade. Nessa perspectiva a existência do mundo está suspensa por um fio, o mundo é, toda vez, a consciência na qual ele está inserido.

Pelo fato de a filosofia não ter encontrado uma unidade sobre a questão da representação, as especulações filosóficas são abandonadas pelas áreas afins como as da Psicologia e Fisiologia ao estudarem como as representações se dão em seres vivos. Os pesquisadores adotam os procedimentos científicos da modernidade impulsionados pela vontade que lança o ser humano para a frente, para o futuro a qualquer custo, mesmo que seja preciso romper com as raízes.

O questionamento heideggeriano sobre o que são as representações não pretende fixar-se nas idéias postas pela ciência moderna nem tampouco saber melhor daquilo que a ciência conhece. O que se pretende ao propor a *Arte de Pensar* é despertar o que diz respeito à relação homem–mundo e que se encontra encoberto no âmbito da ciência moderna. Portanto, pretende-se aqui ficar fora do pensamento científico moderno. Pretende-se pô-lo em *epoché*. HEIDEGGER afirma:

> Nós estamos fora da ciência. Nós estamos em vez disto, por exemplo, frente a uma árvore – e a árvore está na nossa frente. Ela se apresenta para nós. A árvore e nós apresentamo-nos uns aos outros, quando a árvore ali está e nós estamos em sua frente. Nesta relação de um para o outro e um frente ao outro,

---

[30] Cit. por HEIDEGGER, Martin. *Was heißt Denken? op. cit.*, p. 24.

> são e estão a árvore e nós. Esta apresentação não se trata de representação, que em nossa cabeça vibra.[31]

Sem dúvida, ao assumir a postura heideggeriana, que é a fenomenológica, escapa-se do distrito da ciência natural pois, quando se está frente à árvore, não se é só cabeça, só mente, nem tampouco a árvore é só flor, só tronco, nem se está só sem mundo e sem os outros com quem se é (e está) no mundo.

As ciências da Física, Psicologia e Fisiologia quando orientadas pela Filosofia das Ciências, aquela que ao projetar-se para o futuro esquece o passado, não tomam nenhuma árvore como verdadeira e real, ao contrário, tomam-na como um vazio, como um esquema, porém, ao colocarmo-nos frente ao mundo o deixamos onde ele sempre esteve e está, tornando possível a apresentação do mundo ao homem e do homem ao mundo, ocorrendo a relação intencional homem-mundo que constitui um solo, o *Lebenswelt*[32], que pode revelar aquilo que ainda não se *sabe* sobre o mundo e o homem.

Nessa perspectiva, o horizonte do significado do *pensar no movimento da construção das estruturas da Álgebra* se modifica. Ele extrapola o distrito do pensar matemático científico instituído no modo de ciência da civilização ocidental, pois sabe-se que o pensar não se dá independente daquilo que se pensa, daquele que pensa, dos outros que pensam, e nem tão pouco é uma reflexão sobre o que está instituído segundo determinadas categorias.

Pensar, como *Arte de Pensar*, é, desde o início, um movimento que ocorre naqueles que pensam na presença e na permanência do pensável. *Pensar as estruturas da Álgebra,* nessa perspectiva, não significa pensar as estruturas melhor do que os matemáticos a pensam ou pensaram, mas buscar

---

[31] "Wir stehen ausserhalb der Wissenschaft. Wir stehen statt dessen z.b. vor einem blühenden Baum – und der Baum steht vor uns. Er stellt sich uns vor. Der Baum und wir stellen uns einander vor, indem der Baum dasteht und wir ihm gegenüber stehen. In die Beziehung zueinander-voreinander gestellt, sind der Baum und wir. Bei diesem Vorstellen handelt es sich also nicht um 'Vorstellungen', die in unserem Kopf herumschwirren." *Idem*, *ibidem*, p. 25.

[32] Sobre *Lebenswelt*, mundo-vida, ver KLUTH, Verilda Speridião. *A Rede de Significados: Imanência e Transcendência: a Rede de Significação*. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Fenomenologia – Confrontos e Avanços*. São Paulo: Cortez, 2000. *Lebenswelt* apresenta-se como uma primeira determinação intencional em busca do conceito; é o solo no qual toda experiência acontece.

aquilo que ainda não se esclareceu do pensável que se mostra ao se defrontar com o movimento de sua construção/produção.

Para que tal intento seja realizado é preciso que as *estruturas da Álgebra* se apresentem como um todo e encontrem aqueles que a tomem em sua totalidade. Junto a este espetáculo, pano de fundo dessa pesquisa, que não se dá sem espectador, poder-se-á vislumbrar o fenômeno do *pensar no movimento da construção do conhecimento da estrutura da álgebra*, indagando pela sua estrutura e pelas relações que o constituem, explicitando o seu acontecer e seu modo de ser.

O grande desafio imposto pela interrogação norteadora da pesquisa é que o espetáculo tem que acontecer e que esse acontecer possa exprimir e legitimar as *estruturas da Álgebra* no movimento de sua construção/produção. Para tanto, as *estruturas da Álgebra,* historicamente construídas, têm que se fazer presentes, darem-se como pensável à pesquisadora, para que a luz do pensável ao ser pensado ilumine. É preciso reconstruir a *realeza* (autoctonia) das *estruturas da Álgebra* no caminhar investigativo. A necessidade da reconstrução impõe a busca de procedimentos.

Capítulo II

PROCEDIMENTOS E SEUS FUNDAMENTOS

> O mundo é o acontecimento apropriador de clareira e iluminação. O iluminar claro, que pensa o sentido e reúne com concentração e recolhimento, o iluminar que conduz para o livre, esse iluminar é um descobrir.
>
> Martin Heidegger

O procedimento de uma investigação pode ser entendido como um modo de proceder. A prática desse modo de proceder pode vir a ser um método, passível de ser reproduzido no deslanchar da pesquisa. Assim, qualquer que seja o modo de proceder do pesquisador, nele está sempre presente o gérmen de uma técnica.

A técnica é usualmente entendida como um conjunto de regras que determinam um procedimento a ser executado. Assim, ao se questionar a técnica tem-se duas respostas imediatas: "Uma diz: técnica é meio para um fim. A outra diz: técnica é uma atividade do homem."[33] Nessas afirmações pode-se notar tanto as características instrumentais da técnica, quanto suas características antropológicas que, ao serem consideradas, expõem os limites de tudo que é técnico. Segundo HEIDEGGER, a técnica não é igual a sua essência, ou seja, as suas características básicas e a determinação instrumental da técnica não mostram essas características. Ela propicia a constatação do certo e do exato, sem que necessite, previamente, clarear o que constitui o cerne de seu modo de ser.

---

[33] HEIDEGGER, Martin. *Ensaios e Conferências*. Trad. Emmanuel Carneiro Leão, Gilvan Fogel, Marcia Sá Cavalcante Schubach. Petrópolis: Vozes, 2002, p. 11.

Sabendo-se que a técnica é um meio e que "um meio é aquilo pelo que se faz e obtém alguma coisa"[34], tem-se que admitir o surgimento de alguma coisa pela técnica. Isto quer dizer que a técnica deixa chegar à vigência o que ainda não vigora. Pode-se, então, afirmar que a técnica não é um simples meio. Para HEIDEGGER a técnica é uma forma de fazer surgir.

> Era outro o lavradio que o lavrador dispunha outrora, quando dis-por ainda significava lavrar, isto é, cultivar e proteger. A lavra do lavrador não desafiava o lavradio. Na semeadura, apenas confiava a semente às forças do crescimento, encobrindo-a para seu desenvolvimento. Hoje em dia, uma outra posição também absorveu a lavra do campo, a saber, a posição que dispõe da natureza. E dela dispõe, no sentido de uma exploração. A agricultura tornou-se indústria motorizada de alimentação.[35]

No mundo moderno, as coisas produzidas pela técnica tornam-se disponíveis, significando muito mais do que mera provisão. Há um radical pensar logístico fazendo surgir, segundo DAVIS & HERSH[36], o mundo estocástico, regido por um sistema de elementos práticos e teóricos, filosóficos e metodológicos, nos quais a incerteza, herança do pensar cartesiano, é o aspecto dominante.

> As estratégias das companhias de seguro, bem como as dos fundos de previdência social, são postuladas com base em noções aleatórias. As votações, as amostragens, as prévias eleitorais, as provas acadêmicas, que constituem empreendimentos de grande vulto, são baseadas em noções estocásticas.[37]

Vê-se assim que a técnica pode desencadear produções que não mais se reduzem ao mero fazer do homem. O homem já se encontra à disposição dos descobrimentos quando se utiliza da técnica. Mais ainda, o homem pode reduzir-se apenas a dispor a disponibilidade, ir reproduzindo como um autômato.

---

[34] *Idem, ibidem*, p. 13.
[35] *Idem*, *ibidem*, p. 19.
[36] DAVIS, Philip J. & HERSH Reuben . *O Sonho de Descartes. O mundo de acordo com a Matemática*. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.
[37] *Idem*, *ibidem*, p. 20.

Constata-se que nos procedimentos está sempre presente a técnica e que o desconhecimento das características fundantes do procedimento fazem com que a utilização da técnica seja realizada de modo quase inconsciente assumindo seus constructos, de modo natural, sem questionar suas entranhas.

Ao projetar-se para o procedimento de pesquisa as constatações sobre a técnica que afirmam a existência do risco de deixar-se vir à vigência algo, do qual não se sabe nada ou quase nada do seu surgimento, o conhecimento dos fundantes do procedimento de pesquisa torna-se imprescindível para aqueles que querem ver com mais nitidez os constructos gerados pelas suas pesquisas.

A pesquisa que assume esse compromisso de entendimento deve interrogar seu procedimento em seus princípios e em seu primado a fim de construir uma compreensão abrangente das possibilidades abertas pela pesquisa. Nesse panorama, a pesquisa assume uma atitude filosófica frente a seu procedimento. O pesquisar transforma-se em um filosofar.

1. SOBRE A HERMENÊUTICA FILOSÓFICA

Esse panorama de pesquisa, ora vislumbrado, constitui-se em uma diretriz para a escolha do procedimento da pesquisa norteada pela interrogação: *como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra?* Essa pesquisa processar-se-á segundo uma hermenêutica filosófica, conforme explicitada por GADAMER[38].

> "A analítica temporal da existência (Dasein) humana, que Heidegger desenvolveu, penso eu, mostrou de maneira convincente que a compreensão não é um modo de ser, entre outros modos de comportamento do sujeito, mas o modo de ser da própria pré-sença (Dasein). O conceito "hermenêutica" foi empregado, aqui, neste sentido. Ele designa a mobilidade fundamental da pré-sença, a qual perfaz sua finitude e historicidade, e a partir daí abrange o todo de sua experiência de mundo. Que o movimento da compreensão seja abrangente e universal, não é uma arbitrariedade ou uma extrapolação

[38] GADAMER, Hans-Georg. *Verdade e método - Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica*. Trad. Flávio Paulo Meurer. Rev. Ênio Paulo Giachini. Petrópolis: Vozes, 1997.

> construtiva de um aspecto unilateral, mas está, antes, na natureza da própria coisa."[39]

GADAMER realiza uma investigação fenomenológica que coloca em *epoché* os fenômenos *compreensão* e a *maneira de interpretar* expressas historicamente. Como fruto dessa análise tem-se uma conceituação de compreensão e interpretação corretas na medida em que sejam coerentes com a natureza da *presença*[40] e uma reconceituação da tradição.

A tradição outrora entendida como um entrave para a interpretação de textos e obras, converte-se em experiência veiculada pela linguagem, possibilitando a compreensão/interpretação das obras humanas, no modo de proceder no âmbito do círculo hermenêutico gadameriano que se dá na estrutura da pergunta e da resposta constituindo aquilo que o autor chama de *autêntica conversação*, que tem como pano de fundo o modo de ser das *presenças*. Essas idéias serão explicitadas no decorrer desse capítulo.

Vislumbra-se, nessa obra, duas vertentes que encaminham o procedimento a ser desenvolvido por essa pesquisa. Aquela que diz da tradição enquanto experiência, portanto, *presença* em mobilidade; e, aquela que diz do modo de se aproximar da obra humana quando se quer compreendê-la e interpretá-la, que é o modo interrogativo entrelaçado com a possibilidade da resposta. Segundo BICUDO:

> Interrogar o que é dito no texto, interrogar o tema, passa por um trabalho hermenêutico que visa tirar do obscuro a experiência primária homem/mundo, as formas de elas serem

---

[39] *Idem*, *ibidem*, p. 16. Nota da autora: no texto o autor se utiliza da palavra *coisa* se referindo àquilo que é compreendido.

[40] *Pre-sença:* traduzida, do alemão *Dasein*, às vezes como *Ser-aí*, entendida segundo a compreensão possibilitada pela leitura da obra de Martin Heidegger onde, conforme Carneiro Leão, ela é uma abertura que se fecha e, ao se fechar, abre-se para a identidade e a diferença, na medida e toda vez que o homeme se conquista e assume o ofício de ser, quer num encontro, quer num desencontro, com tudo que ele é e não é, que tem e não tem. É esta *pre-sença* que joga originalmente nosso ser no mundo. Mas ser-no-mundo não quer dizer que o homem se acha no meio da natureza, ao lado de árvores, animais, coisas e outros homens. Ser-no-mundo não é nem um fato nem uma necessidade no nível dos fatos, Ser-no-mundo é uma estrutura de realização. Por sua dinâmica, o homem está sempre superando os limites entre o dentro e o fora. Por sua força, tudo se compreende numa conjuntura de referências. Por sua integração, instala-se a identidade e a diferença no ser quando, teórica ou praticamente, se diz que o homem não é uma coisa simplesmente dada nem uma engrenagem numa máquina e nem uma ilha no oceano. LEÃO, Emmanuel Carneiro. *Apresentação*. In: HEIDEGGER, Martin. *Ser e Tempo*. Parte 1. Trad. Márcia de Sá Cavalcante. 4ª ed. Petrópolis: vozes, 1993, p. 20.

> expressas lingüisticamente, os recursos usados pela mente humana e que estão à disposição do contexto histórico e social (tradição), carregados de significados ideológicos e já padronizados pela sociedade, os quais, por si, obscurecem ou modificam (roubam) o sentido daquela experiência de que o texto fala.[41]

A hermenêutica, quando tomada do ponto de vista filosófico, não está sendo entendida como uma doutrina de métodos e técnicas das Ciências do Espírito, e nem tampouco assumida em seu comportamento prático ao exercer o papel de hermenêutica teológica e de hermenêutica jurídica, pois, há muito, a problemática posta pela hermenêutica vem forçando os limites impostos pelo conceito metodológico das ciências, levantando questões tais como: o que é conhecimento científico? E qual é a verdade que ele promove?

O estudo do fenômeno da hermenêutica, realizado por GADAMER, a partir da tradição histórica, procura reconhecer nele uma experiência da *verdade*, explicitado pelo autor como uma experiência da *presença*, que seja ela própria uma forma de filosofar.

GADAMER afirma que, para que se possa refletir sobre o que é *verdade* nas Ciências do Espírito, é preciso haver um esforço, no sentido de entender o universo da compreensão, procurando construir um novo relacionamento com os conceitos que a própria Ciência do Espírito utiliza. Ele descreve o sentido de suas investigações como sendo a busca do que é comum a todas as maneiras de compreender e pretende

> /.../ mostrar que a compreensão jamais é um comportamento subjetivo frente a um "objeto" dado, mas frente à história efeitual, e isto significa, pertence ao ser daquilo que é compreendido./.../ Toda re-produção é imediatamente interpretação, e quer ser correta enquanto tal. Neste sentido, ela também é "compreensão."[42]

Assim, quando esta pesquisa tem a intenção de reconstruir a realeza (autoctonia) *das estruturas da Álgebra*, tem-se à frente uma proposta de reprodução que é interpretação e compreensão, ao buscar inspiração no modo

---

[41] BICUDO, Maria A Viggiani. *A Hermenêutica e o trabalho do professor de Matemática. Caderno 3*. São Paulo: SE&PQ, 1991, p. 84.
[42] GADAMER, Hans-Georg. *Verdade e método - Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica, op. cit.*, p. 19.

da hermenêutica filosófica de Gadamer. A reflexão gadameriana realiza um passeio nos meandros da história da hermenêutica, que assume o conceito cunhado por HEIDEGGER de ser a *compreensão* uma característica da *presença*, que abarca o caráter de projeto da compreensão e de futuro da *presença* e que delineia sua historicidade possibilitando o colher "do comum" das maneiras de se compreender e interpretar.

GADAMER inicia sua análise na pré-história da hermenêutica romântica, quando a doutrina da arte de compreender e interpretar havia se desenvolvido em dois diferentes caminhos: o teológico e o filológico. A hermenêutica teológica é estimulada pelo fato de que os reformistas não viam a necessidade da tradição cristã para a compreensão adequada da Sagrada Escritura, e a hermenêutica filológica é estimulada porque a literatura clássica, por ter um conteúdo de formação humana, sofria influência direta do mundo cristão e dele queria se desvincular.

Ambas tratavam de descobrir o sentido original dos textos e para isto era necessário aprender línguas "mães", como o grego e o hebreu, assim como aperfeiçoar o latim. Segundo Palmer[43], interpretar, em hermenêutica, teve, desde sua origem, o significado de dizer, explicar e traduzir.

Na hermenêutica teológica, LUTERO e seus seguidores transferem um velho conhecimento da retórica antiga, a relação circular do todo e das partes, ao procedimento da compreensão. A relação tornou-se, para eles, um princípio fundamental e geral que todos os aspectos individuais de um texto devem ser compreendidos a partir do contexto, do conjunto e a partir do sentido unitário para o qual o todo está orientado. Para eles, a Bíblia era a unidade, assim, todos os outros textos deveriam ser interpretados segundo seu sentido.

Já na hermenêutica filológica o princípio fundamental era o de compreender o texto a partir dele mesmo. Somente no século XVIII é que foi reconhecido que para compreender adequadamente a Escritura seria necessário reconhecer a diversidade de seus autores e abandonar a unidade dogmática de um padrão. A partir daí, segundo GADAMER, a interpretação não mais se limita a aspectos gramaticais, mas também abrange aspectos históricos.

> O velho princípio interpretativo de compreender o individual a partir do todo já não podia reportar-se nem limitar-se à unanimidade dogmática do cânon, mas dirigia-se à abrangência conjuntural da realidade histórica, a cuja totalidade pertence cada documento individual.[44]

A partir daí não existem mais diferenças entre a interpretação de textos sagrados e profanos. Há, então, uma hermenêutica elevada ao significado de um *órganon* histórico. Ela passa a ser considerada como a arte da interpretação correta das fontes históricas escritas, fazendo parte das atividades da historiografia, que interpretava cada frase da fonte a partir de seu contexto. Segundo GADAMER, a compreensão era tomada como uma doutrina da arte a serviço da *praxis* do filólogo ou do teólogo.

Com o desenvolvimento da ciência hermenêutica de SCHLEIERMACHER, que busca encontrar fundamentação teórica do procedimento comum do teólogo e do filólogo, transcendendo os interesses e buscando a compreensão do pensamento, é que o ponto central e nevrálgico da hermenêutica se mostra: *a compreensão*. É ela então que se converte em problema, pois SCHLEIERMACHER desloca a unidade da hermenêutica. Ele

> /.../ não busca a unidade da hermenêutica na unidade de conteúdo da tradição, a que se deve aplicar a compreensão, mas a procura, à margem de todas especificidades de conteúdo, na unidade de um procedimento que nem sequer é diferenciada pelo modo como as idéias foram transmitidas, se por escrito ou oralmente, se numa língua estranha ou na própria e contemporânea. O esforço da compreensão tem lugar cada vez que não se dá uma compreensão imediata e correspondentemente cada vez que se tem de contar com a possibilidade de um mal-entendido.[45]

Desta forma, SCHLEIERMACHER transforma o sentido da *estranheza*, como sendo algo a ser superado pela hermenêutica, expandindo sua tarefa na direção do *diálogo significativo*, pois a *estranheza* está ligada à

---

[43] Cit. por BICUDO, Maria A Viggiani. *A Hermenêutica e o trabalho do professor de Matemática,op.cit.* p. 64 –67.
[44] GADAMER, Hans-Georg. *Verdade e método - Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica, op. cit.*, p. 278.
[45] *Idem*, *Ibidem*, p. 280.

individualidade do *tu*. Segundo ESPÓSITO[46], a tarefa da hermenêutica em SCHLEIERMACHER, será a de transcender a linguagem e aproximar-se do pensamento do autor. Isso provoca um abandono gradativo da concepção de identidade entre pensamento e linguagem. O fundamento último de toda a compreensão será, portanto, sempre um ato divinatório da índole possibilitada pela vinculação de todas as individualidades, dando origem ao método.

> Cada qual traz em si um mínimo de cada um dos demais, e isso estimula a adivinhação por comparação consigo mesmo.[47]

O método da compreensão terá como meta tanto o que for comum a todos, por comparação, quanto o peculiar de cada um por adivinhação. Para SCHLEIERMACHER nada do que se deva interpretar pode ser compreendido em um só golpe, certificando-se, assim, que se aprende a compreender em um movimento circular, o que o leva a postular a importância de compreender um autor melhor do que ele próprio ter-se-ia compreendido, ganhando um *plus de conhecimento* e chegando a compreender a intenção inconsciente do autor.

Segundo GADAMER, a hermenêutica de SCHLEIERMACHER abrange a arte da interpretação gramatical e psicológica. A extensão de seus pensamentos leva à idéia da superioridade do intérprete sobre o seu objeto, assim, os textos são considerados como puros fenômenos de expressão à margem da sua pretensão de verdade. Na hermenêutica de SCHLEIERMACHER, a obscuridade da história não causa problema, o que causa problema é a obscuridade do *tu*.

Para GADAMER é espantoso o fato de que os historiadores tenham-se apoiado nos trabalhos de SCHLEIERMACHER, chamados por ele de *teoria romântica da individualidade*, pois a meta maior dos historiadores não é a compreensão de um texto isolado, mas a compreensão da totalidade dos nexos da história da humanidade. GADAMER encontra uma resposta a esta questão nas articulações propostas por DILTHEY que realiza a transferência da hermenêutica para a historiografia.

---

[46] ESPÓSITO, Vitória Cunha Helena. *Hermenêutica: Estudo Introdutório. Caderno 2*. São Paulo: SE&PQ, 1991, p. 91.
[47] GADAMER, Hans-Georg. *Verdade e método - Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica. op. cit.*, p. 295.

> Dilthey /.../ toma conscientemente a hermenêutica romântica e a amplia até fazer dela uma historiografia e até uma teoria do conhecimento das ciências do espírito. A análise lógica de Dilthey do conceito do nexo na história representa, segundo a questão em causa, a aplicação do princípio hermenêutico, segundo o qual as partes individuais de um texto só podem ser entendidas a partir do todo, e este somente a partir daquelas, sobre o mundo da história. Não somente as fontes chegam a nós como textos, mas também a realidade histórica é em si um texto que deve ser compreendido.[48]

Tanto a compreensão da história universal quanto a compreensão do *tu*, podem ser consideradas como a compreensão de uma individualidade estranha que deve ser julgada a partir de suas peculiaridades, seus conceitos, paradigmas, etc., porém, apesar disso, também pode ser compreendida nas suas igualdades, porque o *eu* e o *tu* são momentos da mesma vida. Assim, as ciências históricas somente continuam o pensamento iniciado na experiência da vida. Seu ponto de partida é a significância de determinadas vivências que fundamentam o nexo da vida, tal como ele se oferece ao indivíduo e pode ser revivido e compreendido no conhecimento biográfico de outros indivíduos. Na análise de GADAMER, os argumentos de DILTHEY tratam do viver e do reviver do indivíduo. Ele desenvolve o modo como o indivíduo apreende um contexto vital a partir do qual procura construir conceitos capazes de sustentar o contexto histórico e seu conhecimento. "Ele dava razão à escola histórica em que não existe um sujeito geral, mas somente indivíduos históricos"[49].

Os conceitos, construídos por ele, são conceitos vitais que diferem dos da Ciência Natural, que lidam com *sujeitos lógicos*, pois permanecem em seus conceitos a identidade de consciência e objeto. Seria então preciso construir a fundamentação epistemológica das Ciências do Espírito que as interligassem com o vivido. Para tanto, DILTHEY procura diferenciar desde o início as relações do mundo espiritual das relações causais no nexo da natureza. Segundo GADAMER, DILTHEY se apóia no trabalho inicial de HUSSERL, *Investigações Lógicas*, e distingue o nexo estrutural, o nexo das relações

---

[48] *Idem*, *ibidem*, p. 308.
[49] Cit. por *idem*, *ibidem*, p. 342.

internas, o qual DILTHEY chamou de *significado*, do nexo causal, sem contudo atentar para o fato de que em HUSSERL.

> /.../ toda consciência é consciência de algo; todo comportamento é comportamento para com algo. O para quê (wozu) dessa intencionalidade, o objeto intencional, não é para Husserl um componente psíquico real, mas uma unidade ideal, um intencionado (Gemeinstes) como tal. Neste sentido, Husserl tinha defendido na primeira investigação lógica o conceito de um significado ideal-unitário face aos preconceitos do psicologismo lógico.[50]

O que se pode compreender da hermenêutica proposta por DILTHEY, em termos do velho princípio, a relação circular entre o todo e as partes, é que ele toma a teoria da estrutura que constrói sua unidade a partir de seu próprio centro, para explicar o fato de que se compreende um nexo estrutural a partir de seu centro, que também atende às exigências do pensamento histórico de compreender cada época histórica a partir de si própria e de não a medir com o padrão de um presente estranho a ela. A partir de um núcleo pode-se, então, construir um conhecimento histórico universal. Assim, o mundo histórico é pensado como um texto a ser decifrado. A hermenêutica passa a ser mais do que um instrumento. "É o *medium* universal da consciência histórica, para a qual não existe nenhum outro conhecimento da verdade do que compreender a expressão e, na expressão, a vida."[51]

Na análise de GADAMER, DILTHEY não menosprezou a significação da experiência da vida, tanto individual quanto universal, porém o individual e o universal são determinados de maneira privada, a partir de seus próprios centros e mediante uma indução não-metódica, demonstrando a busca incessante de uma descrição adequada da experiência no seio das Ciências do Espírito e da *objetividade* que se pode alcançar com elas. Havia, portanto, a ausência de uma sustentação epistemológica no trabalho de DILTHEY que tecesse o "entre" do individual com o universal.

A crítica geral filosófica da época recai sobre o imediatamente dado, não só com relação ao trabalho de DILTHEY, mas também com o trabalho de HUSSERL, *Idéias I* de 1913. O que estava sendo realmente questionado, era o

---

[50] *Idem*, *ibidem*, p. 344.

solipsismo[52] detectado nas idéias apresentadas nas obras destes pensadores. As idéias fenomenológicas desvencilham-se lentamente desse julgamento, com o aprofundamento do pensamento husserliano, realizado tanto por HUSSERL, cujo tema de pesquisa era a vida e que se torna absolutamente claro somente em *Idéias II*, publicado em 1952, quanto por HEIDEGGER, cujo tema de pesquisa era o ser, na obra intitulada *Ser e Tempo*, publicada em 1927.

GADAMER vislumbra um elo[53] entre as obras de HEIDEGGER e HUSSERL e afirma que HEIDEGGER engajou-se na investigação da intencionalidade, como entendida no âmbito da Fenomenologia de HUSSERL[54] e pode, assim, tornar consciente

> /.../ de maneira geral, a radical exigência que se coloca ao pensamento em virtude da inadequação do conceito de substância para o ser e o conhecimento histórico.[55]

O projeto de HEIDEGGER de uma fenomenologia hermenêutica intitulada de *hermenêutica da facticidade* descreve a existência como facticidade da *presença*. Ela não é passível de fundamentação nem tampouco de dedução. Ela deve ser a base de todo o questionamento fenomenológico,

---

[51] *Idem*, *ibidem*, p. 367.

[52] Solipsismo: 1. Filos. Doutrina segundo a qual a única realidade no mundo é o eu: "o equivalente concreto do que os filósofos chamam de solipsismo, isto é, da atitude que consiste em sustentar que o eu individual de que se tem consciência, com as suas modificações subjetivas, é que forma toda a realidade" (Temístocles Linhares, *Introdução ao mundo do romance*, p. 463). *Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

[53] Esse mesmo elo é também apontado por Merleau-Ponty: "Mas todo *Sein und Zeit* nasceu de uma indicação de Husserl, e em suma é apenas uma explicação do *"natürlichen Weltbegriff"* ou do *"Lebenswelt"* que Husserl, no final de sua vida, apresentava como tema primeiro da Fenomenologia, /../." MERLEAU-PONTY, Maurice. *Fenomenologia da Percepção*. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Martins Fontes, 1994, p. 2. Nota da autora: *Sein und Zeit* em português *Ser e Tempo*; *natürlichen Weltbegriff* em português *conceito de mundo natural.*

[54] "/.../ Husserl distingue entre a intencionalidade de ato, que é aquela de nossos juízos e de nossas tomadas de posição voluntárias, a única da qual a Crítica da Razão pura falou, e a intencionalidade operante (fungierende Intecionalität), aquela que forma a unidade natural e antepredicativa do mundo e de nossa vida, que aparece em nossos desejos, nossas avaliações, nossa paisagem, mais claramente do que no nosso conhecimento objetivo, e fornece o texto do qual nossos conhecimentos procuram ser a tradição em linguagem exata." *Idem*, *ibdem*, p. 16.

[55] GADAMER, Hans-Georg. *Verdade e método - Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica, op. cit.*, p. 369.

pois ela é ser ao existir. Desta forma, HEIDEGGER estabelece a diferença entre ser e ente, pois para ele *o ser do ente não é outro ente*.

Segundo GADAMER "A tese de Heidegger era: o próprio ser é tempo. Com isso ele rompe todo o subjetivismo da mais recente filosofia"[56], aquela impregnada do solipsismo. Como HEIDEGGER trata da facticidade que era apontada por algumas correntes como um problema central do historicismo, pode-se, então, dizer que a ontologia fundamental heideggeriana tinha como pano de fundo o problema da história. Com isso, a diferenciação entre Ciências do Espírito e Ciências Naturais já não faz sentido, pois

> Compreender /.../ é a forma originária de realização da presença, que é ser no mundo. Antes de toda diferenciação da compreensão nas diversas direções do interesse pragmático ou teórico, a compreensão é o modo de ser da pré-sença, na medida em que é poder-ser e "possibilidade".[57]

A compreensão e a interpretação só se realizam frente à totalidade da estrutura existencial, quer seja no caso do conhecedor ter a intenção de interpretar "o que aí está" ou de extrair das fontes "como realmente foi". HEIDEGGER tinha como intenção desenvolver a ontologia da pré-estrutura da compreensão, a estrutura da *presença*. Para tanto, ele se aprofundou na problemática da hermenêutica e das questões históricas. Ele deriva a estrutura circular da *compreensão* a partir da temporalidade da *presença*. Isto acarreta um novo e fundamental sentido à estrutura circular. Como HEIDEGGER mesmo afirma:

> O círculo não deve ser degradado a círculo vicioso, mesmo que este seja tolerado. Nele vela uma possibilidade positiva do conhecimento mais originário, que, evidentemente, só será compreendido de modo adequado, quando a interpretação compreendeu que sua tarefa primeira, constante e última permanece sendo a de não receber de antemão, por meio de uma "feliz idéia" ou por meio de conceitos populares, nem a posição prévia, nem a visão prévia, nem a concepção prévia (Vorhabe, Vorsicht, Vorbegriff), mas em assegurar o tema científico na elaboração desses conceitos a partir da coisa, ela mesma. [58]

[56] *Idem*, *ibidem*, p. 389.
[57] *Idem*, *ibidem*, p. 392.
[58] Cit. por *idem*, *ibidem*, p. 401.

O círculo descrito por HEIDEGGER tem um sentido ôntico e toda interpretação correta projeta-se contra arbitrariedades e orienta sua vista “às coisas mesmas”. Portanto, compreender um texto é sempre projetar-se e, no surgir de um primeiro sentido no texto, o intérprete prelinear um sentido todo. A tarefa da compreensão é a de elaborar projetos corretos e apropriados às coisas, que por serem projetos são antecipações que se devem confirmar nas coisas. Sendo assim, a compreensão atinge sua possibilidade maior de ser quando as condições prévias com as quais se inicia não são arbitrárias.

Tem-se, assim, uma nova postura frente à tradição presente no texto. Já não é mais necessário assegurar-se contra a tradição, mas manter afastado tudo o que possa impedir de compreendê-la a partir da própria coisa, como os preconceitos que não são percebidos e que não se tornam conscientes. Nesta visão, os preconceitos não são por si só, necessariamente, positivos ou negativos. Ao contrário, é por meio dos preconceitos fundamentais e sustentadores que se realiza o sentido do pertencer, constituinte da tradição do transmitido.

> O tempo já não é mais, primariamente, um abismo a ser transposto porque divide e distancia, mas é, na verdade, o fundamento que sustenta o acontecer, onde a atualidade finca suas raízes. A distância de tempo não é, por conseguinte, algo que tenha que ser superado. Esta era, antes, a pressuposição ingênua do historicismo, ou seja, que era preciso deslocar-se ao espírito da época, pensar segundo seus conceitos e representações em vez de pensar segundo os próprios, e somente assim se poderia alcançar a objetividade histórica. Na verdade trata-se de reconhecer a distância de tempo como possibilidade positiva e produtiva do compreender. Não é um abismo devorador, mas está preenchido pela continuidade da herança histórica e da tradição, a cuja luz nos é mostrado o transmitido. Não será exagero, se falarmos aqui de uma genuína produtividade do acontecer.[59]

A distância não atrapalha, ela permite a expressão do sentido de alguma coisa que não está contida em um único texto, em uma única época histórica e permite distinguir os preconceitos fundamentais e sustentadores. A realização desta distinção é uma tarefa hermenêutica. Ela se efetua à medida que os

---

[59] *Idem*, *ibidem*, p. 445.

preconceitos daquele que compreende tornem-se conscientes e sejam postos em suspensão. Pôr em suspensão significa seguir a estrutura da pergunta, que abre e mantém aberta as possibilidades. Nesta perspectiva, o pensamento histórico tem que pensar ao mesmo tempo a sua própria historicidade. O objeto histórico é uma relação constituída tanto da realidade histórica como da realidade do compreender histórico. Portanto, uma hermenêutica apropriada ao objeto em questão deve desvelar, na própria compreensão, a realidade da história.

A realidade da história se dá pelos interesses que não se restringem aos fenômenos históricos e as obras transmitidas, mas também ao efeito dos mesmos na história. Os efeitos são geralmente considerados como um mero complemento do questionamento histórico. Suas análises são tecidas paralelamente à compreensão dos fenômenos. Porém

> Quando se quer compreender um fenômeno histórico a partir da distância histórica que determina nossa situação hermenêutica como um todo, encontramo-nos sempre sob o efeito dessa história efeitual.[60]

A história efeitual fixa antecipadamente o que se mostra como objeto de investigação, podendo obscurecer a verdade, o sentido deste fenômeno. Assim, sempre que uma obra, uma tradição, tiver que sair da obscuridade, dá-se a necessidade da *consciência da história efeitual*, que é, em primeria análise, *consciência da situação hermenêutica*, e a exigência do seu questionamento.

Para GADAMER a *consciência da história efeitual* tem a estrutura da experiência, e se dá na unidade de saber e efeito. Ao realizar-se uma experiência com um objeto, não se tem noção nítida das coisas, e desta negatividade é que se adquire um saber abrangente. Isto quer dizer que a experiência que vivemos transforma o nosso saber, a tal ponto que não é possível passarmos duas vezes pela mesma experiência. Dizer ter passado por uma experiência é dizer que a vivemos. Deste modo, aquilo que antes era inesperado agora é previsto, originando o *efeitual*. Pode-se, então, dizer que

---

[60] *Idem, ibidem*, p. 449.

compreensão é uma forma de efeito. A essa estrutura de experiência, GADAMER dá o nome de *dialética*.

> Aquele que experimenta se torna consciente de sua experiência, torna-se um experimentador: ganhou um novo horizonte dentro do qual algo pode converter-se para ele em experiência.[61]

Como experimentador, ou melhor dizendo, experienciador, o homem toma consciência de sua finitude, ele encontra seu limite no poder fazer e na razão planificadora. A autêntica experiência é, assim, experiência da própria historicidade que para alcançar a autenticidade terá que refletir a estrutura geral da experiência, aquilo que tem a ver com a tradição. No entanto, a tradição não é um acontecer que se possa conhecer pela experiência direta, ela é linguagem e fala por si mesma.

> /.../ Estamos convencidos de que a compreensão da tradição não entende o texto transmitido como a manifestação vital de um tu, mas como um conteúdo de sentido, desvinculado de toda atadura para com os que opinam, para com o eu e o tu. Ao mesmo tempo, o comportamento com relação ao tu e ao sentido da experiência que nele tem lugar tem que poder servir à análise da experiência hermenêutica; pois também a tradição é um verdadeiro companheiro de comunicação, ao qual estamos vinculados como o está o eu e o tu.[62]

Portanto, a *consciência histórica,* que quer compreender a tradição, não pode deixar-se levar pela maneira metódica e crítica da pesquisa que se aproxima das fontes, como se elas fossem um escudo de proteção dos seus próprios juízos e pré-conceitos. É preciso que se pense também a própria historicidade, caracterizando-se, portanto, como *consciência da história efeitual*, cujo correlato na experiência do *tu* é experenciar o *tu* como *tu*, não desconsiderar sua pretensão e deixar falar algo por ele, ter a abertura de deixar valer em si algo contra si, se necessário o for, mesmo que não haja nenhum outro que disto reclame. Dá-se a abertura para *compreender* o outro. O correlato na experiência hermenêutica é deixar valer a tradição em suas próprias pretensões.

---

[61] *Idem*, *ibidem*, p. 522.

> A *consciência da histórica efeitual* vai mais além da ingenuidade de comparar e igualar, deixando que a tradição se converta em experiência e mantendo-se aberta à pretensão de verdade que lhe vem ao encontro nela. A consciência hermenêutica tem sua consumação não na certeza metodológica sobre si mesma, mas na própria disposição à experiência que caracteriza o homem experimentado face ao que está preso dogmaticamente.[63]

Há de se esclarecer, portanto, como GADAMER indaga e descreve a *estrutura lógica da abertura* que caracteriza a consciência hermenêutica. Em toda experiência encontra-se pressuposta a *estrutura da pergunta*. O experenciar não se dá sem o perguntar. Faz-se, portanto, necessário uma breve explicitação sobre a pergunta.

É essencial de toda pergunta que ela tenha um sentido. Sentido entendido como orientação, direção a algo. O interrogado ao ser perguntado é visto sob uma determinada perspectiva. O *logos* que desenvolve esta perspectiva do interrogado é sempre já resposta e só tem sentido no sentido da pergunta.

> Todo perguntar e todo querer saber pressupõem um saber que não se sabe, mas de maneira tal que é um não saber determinado o que conduz a uma pergunta determinada."[64]

Tem-se a presença de algo que não quer integrar-se nas opiniões preestabelecidas, chega-se, com isso, a um momento em que a pergunta se impõe e não se pode mais permanecer agarrado às opiniões alheias postas.

A pergunta é a arte de conduzir um diálogo autêntico. Constitui uma dialética e, como tal, os interlocutores, a pergunta e a resposta não se ignoram na conversação, revelando a *estrutura de pergunta e de resposta* como compreensão.

É verdade que, ao compreender uma obra humana ou um texto, é o intérprete que os compreende e que os traz à fala, a partir de si próprio, porém orientado pela pergunta que se refere à resposta latente na obra ou no texto. Se por um lado, o texto tem que ser entendido como resposta a pergunta

---

[62] *Idem, ibidem*, p. 528.
[63] *Idem, ibidem*, p. 533.
[64] *Idem, ibidem*, p. 539.

que pergunta, por outro lado, a latência de uma resposta pressupõe uma pergunta, aquela que o texto responde. E mais, pressupõe que aquele que a formule tenha sido alcançado e interpelado pela própria tradição.

> O que a ferramenta do "método" não alcança tem de ser conseguido e pode realmente sê-lo através de uma disciplina do perguntar e do investigar, que garante a verdade.[65]

Verdade entendida como o desvelamento do sentido, ou seja, a compreensão a que se chega ao expor o afirmado ao processo contínuo, cuidadoso - porque metódico e crítico, de tirar as vendas ou véus que encobrem o sentido.

Ao assumir como pano de fundo a hermenêutica filosófica gadameriana, investigar a interrogação: *como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra?* construirá uma trajetória livre de métodos, porém rigorosa ao exercer a disciplina de perguntar que permite a construção da *conversação autêntica*, dialética, das perguntas que surgem no desenrrolar da pesquisa com as suas respostas latentes, passíveis de compreensão nas obras humanas.

Obras humanas, pensadas agora como textos, que serão evidenciados à medida que eles se apresentem como uma possibilidade de resposta latente à pergunta formulada. O modo investigativo, assumido nesta pesquisa fica, assim, caracterizado como aquele que se sustenta na estrutura de resposta e de pergunta, enquanto compreensão.

A filosofia hermenêutica de GADAMER possibilita compreender as *estruturas da Álgebra* como uma tradição, como uma obra humana, como experiência hermenêutica. Tomá-la como tal, é colocar-se no movimento de *consciência da história efeitual da Álgebra Abstrata*. *Álgebra*, agora, pensada como um texto matemático inserido na tradição da Matemática, como fenômeno histórico, sujeito aos significados ideológicos que constituem sua historicidade, uma historicidade inserida na historicidade da Matemática, e, portanto, na historicidade humana.

---

[65] *Idem*, *ibidem*, p. 709.

Em conseqüência da constatação de que a Á*lgebra* possa ser considerada como um fenômeno histórico inserido na tradição Matemática, o procedimento de pesquisa tornar-se-á mais claro ao se esclarecer o significado de História assumido nessa pesquisa.

2. SOBRE O APRIORI UNIVERSAL DA HISTÓRIA

As idéias heideggerianas que explicitam a historicidade do ser, em seu primado como ser-no-mundo, acontecer da *presença* que se projeta delineando o vir-a-ser e ter-sido e que dá a dimensão temporal ao ser, são entendidas e espandidas na afirmação de BICUDO ao descrever o significado de história presente na fenomenologia:

> Movimento vital da pre-sença que sendo no mundo coexiste com outros seres, projetando no tempo e no espaço suas possibilidades de ser. Possibilidades essas entrelaçadas ao horizonte histórico constituído pelas formações originais e pelas sedimentações efetuadas pela tradição e pelas expressões manifestas na linguagem. [66]

Os elementos incorporados pela autora sobre a História dizem respeito à tradição histórica enquanto experiência hermenêutica que é linguagem e, como tal, importa e transmite as sedimentações culturais efetuadas. Idéias coerentes ao pensamento gadameriano exposto anteriormente. Ainda segundo BICUDO, a história flui temporalmente modificando-se, mas concomitantemente retém-se algo - as sedimentações - que se estabelece mediante sínteses de transição portadoras de modos de pensar e de fazer de uma comunidade. Isto não quer dizer que a história se faça de maneira cumulativa,

> Como se fosse constituída por soma de partes justapostas, mas que se estrutura pela organização possibilitada pelas interrogações interrogadas as quais conduzem as interpretações dos efeitos e contextos, permitindo a

[66] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Tempo, tempo vivido e história*. Bauru: EDUSC, 2003, p. 87.

> formulação de concepções que, por sua vez, articulam a visão de sua totalidade. [67]

Na visão fenomenológica de história, aquela que comporta uma visão de mundo e de homem construída a partir da relação intencional homem-mundo que tem o *Lebenswelt* (mundo-vida) como fundante e que é tradição passível de ser vivida, está presente a possibilidade da compreensão dos nexos históricos da humanidade que constituem uma história universal legitimada pelo *Lebenswelt* (mundo-vida) solo de todas as vivências. Lembrando GADAMER, entender os nexos históricos da humanidade é a meta maior dos historiadores.

Uma vez posto como a História, enquanto Ciência do Espírito, está sendo compreendida na trajetória da pesquisa do: *como se revela o pensar no movimento da construção das estutruras da Álgebra?* é importante explicitar como as idéias que descrevem a história universal como tradição nas Ciências do Espírito, articulam-se com a Ciência Matemática, por ser a *Álgebra* um campo desta ciência, e quais possibilidades abrem-se com esta articulação, ao se tomar a *Álgebra* como um texto matemático inserido na tradição da Matemática ocidental, tanto do ponto de vista histórico e filosófico, quanto das possíveis contrubuições que essa articulação possa trazer para os procedimentos da pesquisa.

No horizonte dessa articulação, surgem perguntas que se referem diretamente à natureza dos objetos matemáticos e de seu estabelecimento na vida cultural, tais como: de que continuidade se fala quando afirmamos que a Matemática é contínua? O que seria a Matemática para mostrar-se contínua, sem ser uma soma de partes *justa postas*? O que seria a Matemática para mostrar-se não inteiramente dependente de pressupostos conceituais e nem tampouco impermeabilizada às influências de novas formas de pensamento? Como podemos descrever sua duração no tempo e nas diversas civilizações? Como considerar as suas mais diversas formas de expressão? Como falar de sua trajetória histórica?

[67] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Concepção de História presente no pensar husserliano*. In: Anais do V Seminário de História da Matemática, UNESP, Rio Claro, p. 139.

Edmund Husserl (1859-1938) dá respostas a estas questões no campo da fenomenologia, em um anexo datado de 1936, intitulado: *Die Urstiftung und das Problem der Dauer. Der Ursprung der Geometrie,* em português *O estabelecimento e o problema da duração. A origem da Geometria*, no qual ele explicita uma filosofia histórica das ciências tomando como exemplo a Geometria. O texto, porém, refere-se a todas as disciplinas[68] que se ocupam com as estruturas matemáticas existentes no espaço-tempo puro. Este texto é um dos componentes de um trabalho mais amplo que busca compreeender a crise da Ciência Européia Contemporânea.

É preciso abrir-se um parênteses para explicitar-se alguns detalhes que mobilizaram HUSSERL a articular as idéias expostas nesse artigo. Segundo a análise de STEINER[69] sobre as idéias husserlianas, o projeto da Ciência Ocidental se faz em torno da questão: Pode-se através da *doxa*, da mera opinião, galgar o saber verdadeiro, *episteme*? Junto a isso desenvolve-se também a idéia de h*umanidade européia - europäischen Menschentum*[70] expressão que se torna estranha para o próprio europeu.

Nessa análise, STEINER evidencia o engano da Ciência Moderna ao assumir o conhecimento absoluto como aquele sem relativismo. A articulação das idéias fenomenológicas que apontam para esse engano têm como princípio que *a toda visão (Sicht) é necessário uma orientação (Ansich[71])* ou seja, a *objetividade* só pode ser esclarecida pela subjetividade constituinte.

Isto quer dizer que o conhecimento absoluto, como conhecimento objetivo é ele próprio relativo a outro conhecimento relativo. O conhecimento absoluto se constitui pela orientação do princípio das ciências, a idéia de *Episteme*. Em outras palavras, no mundo das ciências não existe conhecimento sem *perspectiva*. O próprio conhecimento absoluto é perspectival.

Para a fenomenologia, o solo, no qual toda *perspectiva* imaginável pode ser tomada, é o *Lebenswelt* (o mundo-vida). Sustentado por essa concepção de

---

[68] Nota da autora: Conserva-se nesse texto a palavra *disciplina(as)* por ser a palavra usada pelo autor, porém entende-se que essa palavra poderia ser substituida por *área(as) ou campo(os).*

[69] STEINER, Uwe C. *Husserl*. München: Diederichs, 1997, p. 9-67.

[70] Nota da autora: *Menschentum* é uma palavra alemã do século XVII, que foi substituída pela palavra, *Menschenheit*, em português humanidade, usada até os nossos dias.

[71] Nota da autora: *Ansicht* tem também, em determinados contextos, o significado de *atitude* e *opinião*.

mundo, HUSSERL procura restituir na medida do possível e imaginável o autêntico sentido (*Sinn*) de *objetividade*, não contemplado pela Ciência Natural.

O texto sobre *A Origem da Geometria* está colocado em um capítulo intitulado *Der Sinn in der Geschicht und in der Lebenswelt – O sentido na História e no Lebenswelt* (mundo-vida). O título faz uma sugestão da tão desejada ponte objetiva entre a vida subjetiva e a vida na História, sonho de muitos pensadores como DILTHEY, tecida por GADAMER nas Ciências do Espírito ao colocar a *compreensão* em *epoqué*, que será agora tecida por HUSSERL nas Ciências em Geral e, em particular na Matemática, ao tematizar o *sentido* (*Sinn*).

A análise husserliana foca o tema *sentido* no âmbito da subjetividade, da *intersubjetividade* e da *objetividade*, tomando-o como o fio condutor que tece a rede de conhecimento científico historicamente atualizado engendrado na rede de vivências do percebido, do intuído, do falado e do escrito. Mostrando que a mais simples vivência de evidência tem a ver com a *objetividade*.

HUSSERL explicita as ocorrências geradoras de sentido nos três âmbitos e a transmissão de *sentido* de uma para a outra. Ele abre a possibilidade de que a mais simples vivência de evidência pode ter algo com a *objetividade* científica matemática ocidental.

Para HUSSERL, as ciências, em seus mais diversos estágios de desenvolvimento devem ser vistas como tradições, e afirma:

> Em uma infinidade de tradições movimenta-se a nossa existência humana. O mundo cultural todo está dado por todas as suas formas de tradição. Elas não se tornaram casualmente como tal, nós sempre soubemos que tradição, justamente tradição, torna-se, em nossos espaços humanos de atividades humanas, também espiritual (geistig) – também quando nós, em geral, nada ou quase nada sabemos da determinada proveniência e de fato da realizada espiritualidade. E, ainda assim, repousa neste "não saber nada", em todas as partes, e em essência, um implícito saber, assim como para o explícito, um saber de incontestável evidência. [72]

[72] "In einer Unzahl von Traditionen bewegt sich unser menschliches Dasein. Die gesamte Kulturwelt ist nach allen ihren Gestalten aus Tradition da. Als das sind sie nicht nur kausal geworden, wir wissen auch immer schon, daß Tradition eben Tradition ist, in unseren Menschheitsräumen aus menschlicher Aktivität, also geistig geworden – wenn wir auch im allgemeinen von der bestimmten Herkunft und der faktisch hierbei

As realizações humanas tradidionais iniciam-se com uma naturalidade superficial, começam de materiais disponíveis à mão, que possibilitam uma realização primeira. Basta que se pense nos primeiros achados culturais de que se tem notícia, como o uso de pedras para determinados fins na pré-história. Do superfical, se é conduzido ao profundo. Isto se dá quando se interroga a realização primeira. A interrogação dá sentido e direciona as respostas mantendo a universalidade e a aplicabilidade para todo individual e, ao mesmo tempo, para um caso isolado, possibilitando, assim, uma aquisição totalizadora de aquisições. Isto ocorre com todas as ciências, portanto, é preciso que as ciências tenham tido um começo histórico, que, por sua vez, precisa ter uma origem em um realizar de uma construção vitoriosa, que se deixa questionar, estendendo-se a novos atos humanos pelo trabalho contínuo de interrogar.

As disciplinas matemáticas vistas como tradição, são realizações humanas, têm sua origem estabelecida ao ter sido uma primeira aquisição originada de uma primeira atividade subjetiva criadora possibilitada por uma *evidência originária* que tem como solo o *Lebenswelt*. Contudo, as disciplinas matemáticas estão sujeitas a um dinamismo realizador de sínteses contínuas em que todas as aquisições anteriores continuam válidas formando uma totalidade, de tal forma que, em cada presença total, como sentido historicamente construído, dadas nas sínteses, está a premissa total para a aquisição de um novo nível. Desta forma, o sentido das aquisições anteriores fica conservado, ao menos, em suas características nucleares.

Desta feita, pode-se dizer que o sentido total na temporalidade não pode estar presente no início. Ali há uma formação primitiva, o sentido que aparece no movimento da continuidade da realização primeira, que é forma de expressão com sentido atual, abre-se para um nova significação e, na evidência das realizações, primeira e posteriores, está presente a intencionalidade.

---

zustandebringenden Geistigkeit nichts oder so gut wie nichts wissen. Und doch liegt in diesem Nichtwissen überall und wessensmässig ein implizites, also auch zu explizierendes Wissen, ein Wissen von unanfechtbarer Evidenz." HUSSERL, Edmund. Die Urstiftung und das Problem der Dauer. Der Ursprung der Geometrie, *op. cit.*, p. 438.

> Evidência significa nada mais do que o apreender consciente de uma entidade em seu original ser-aí. Realizações vitoriosas de um projeto são evidências para a subjetividade, em cuja realização está o obtido mais original do que isto é dado. [73]

Toda formação de sentido, que se projeta a uma realização, tem seu início em uma síntese intencional. E nela estão presentes as aquisições anteriores, como sínteses de transição e, por conseguinte, a *evidência originária* da primeira realização. É nesse sentido que HUSSERL afirma que, na realização, o obtido é mais original do que o percebido ou intuído.

Portanto, ao se perseguir o pensamento husserliano tecido sobre a tradição matemática, deve-se ter em mente que os objetos matemáticos têm uma origem inicial, aquela estabelecida por uma aquisição originária de uma primeira atividade humana possibilitada por uma evidência subjetiva que tem como solo o *Lebenswelt* (mundo-vida), e que projeta o original sentido no subjetivo daquele que viveu a evidência.

Deste ato participam todos os que viveram, vivem ou viverão a evidência. Essa maneira de fazer-se presente a muitos, em tempos distintos e de forma genuína, porque é a mesma para todos em termos estruturais, gera *objetividade* no âmbito da subjetividade e dá a realização matemática primeira, e a suas derivações, uma singular atemporalidade e não-independência porque essas realizações necessitam de alguém que as realizem. A *objetividade* caracteriza-se, portanto, como uma *objetividade ideal* em contraste com a *objetividade real* que é temporal e independente por estar mercê de sua própria natureza.

Desta forma, intencionar o início, a origem, não é buscar um início perdido no túnel do tempo em terras estranhas, mas é buscar compreender a evidência originante e os modos de expressão pelos quais foi mantida no mundo, mesmo que expresso por um único indivíduo.

O que foi até aqui exposto revela o entendimento das disciplinas matemáticas vistas no âmbito do sujeito. Porém, a existência da Matemática não é psicológica, não tem uma existência objetiva restrita ao subjetivo. Ela é acessível a todos os homens de todos os povos e de todas as épocas, embora se apresente de maneira variada e especial nas diversas culturas. Frente a isso fica a pergunta: Como se dá a *objetividade* matemática de uma subjetividade para outra subjetividade?

Para que se possa compreender o encaminhamento que HUSSERL dá a esta questão, é importante salientar que na Língua Portuguesa, não se diferencia com clareza as palavras *sentido* e *significado,* porém segundo DERRIDA a palavra *significado*, *Bedeutung* em alemão, e a palavra *sentido*, *Sinn* em alemão, são usadas por HUSSERL com distintas funções: uma se refere a linguagem e a outra aos objetos intuídos ou percebidos.

> *Bedeutung* é reservada ao conteúdo de sentido ideal da expressão verbal, do discurso falado, ao passo que o sentido (*Sinn*) cobre toda a esfera noemática até em sua camada não-expressiva.[74]

Assim, o termo *sentido* deve ser interpretado como sendo aquele sentido que cobre a esfera noemática, que é dada na vivência da evidência e que não está restrita ao sentido ideal da expressão verbal ou escrita. Está distinção é fundamental no entendimento das idéias que serão expostas, pois a *objetividade ideal* matemática conquistada pela subjetividade é compartilhada com outras subjetividades pela linguagem que expressa.

De modo geral, a comunicação humana se dá de modo consciente. O homem é consciente do mundo como horizonte de vida da humanidade. Assim, sempre está distinto no horizonte de mundo o horizonte de mundo que é de um indivíduo e aquele pertencente aos seus próximos, mesmo sem suas presenças. Tem-se então, de início, um entendimento mútuo, ou seja, o mundo que se me apresenta não é por princípio só meu.

> Neste sentido, a humanidade é, para cada homem, para o qual ela é nós-horizonte, uma comunidade de Poder Expressar (Aussprechen-Könnes) naturalmente compreensível, plena e recíproca, e nela pode qualquer um e tudo, o que ao redor de

---

[73] Evidentz besagt gar nichts anderes als Erfassen eines Seienden im Bewusstsein seines originalen Selbst-da. Gelingende Verwirklichung einer Vorhabe ist für das tätige Subjekt Evidenz, in ihr ist das Erwirkte originaliter als es selbst da. *Idem*, *ibidem*, p. 440.

[74] DERRIDA, Jacques. *A voz e o Fenômeno*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor,1994, p. 27.

> sua humanidade é, estar sendo tratado como objetivo./.../ Mundo objetivo é desde o início, mundo para todos, o mundo, que todo homem tem como horizonte de mundo. O seu ser objetivo pressupõe homem, como homem de sua linguagem universal.[75]

HUSSERL afirma ainda que a comunicação no horizonte da humanidade ocorre por intermédio da linguagem, que é correlata ao mundo e está, portanto, relacionada ao universo de objetos capazes de serem expressos lingüísticamente. Assim, a *objetividade ideal*, como componente do horizonte de mundo é veiculada, compartilhada e mantida no corpo lingüístico que a carrega com seu sentido (*Sinn*) e significado (*Bedeutung*).

Por intermédio do entendimento possibilitado pela linguagem, a realização originária, bem como o produto de um ato subjetivo, pode ser recompreendida por outro. Dá-se, assim, um *reproduzir* de pessoa a pessoa e, no encadeamento do entendimento desta *repetição*, está a evidência daquilo que é o mesmo também para o outro.

> A repetição de um modo de comunicar que se mostra bem-sucedido constitui um substrato para que a lógica subjacente a essa linguagem se instaure, fortalecendo-se à medida que impõe aos sujeitos falantes modos de estruturar a linguagem que dizem da experiência vivida, da evidência, do *insight*.[76]

HUSSERL alerta para o modo de ser da formação das repetições afirmando que: "A formação repetida e produzida torna-se consciente na unidade de uma comunidade de/para comunicação de várias pessoas, não

---

[75] "In diesem Sinn ist die Menschheit für jeden Menschen, für den sie sein Wir-horizonte ist, eine Gemeinschaft des sich wechselseitig normalerweise voll verständlich Aussprechen-Könnes, und in ihr kann jedermann auch alles, was in der Umwelt seiner Menschheit da ist, als objektiv seiend besprechen./../ Objetive Welt ist von vornherein Welt für alle, die Welt, die " jedermann" als Welthorizont hat. Ihr objetives Sein setzt Menschen als Menschen ihrer allgemeinen Sprache voraus." HUSSERL, Edmund. Die Urstiftung und das Problem der Dauer. Der Ursprung der Geometrie, *op. cit.*, p. 443.

[76] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Tempo, tempo vivido e história, op. cit.*, p. 66. Conforme explicitação em sessão de orientação: O significado de subjacente, enquanto o que subjaz à linguagem não revela a totalidade do que ocorre no processo de comunicação pela linguagem. "Pois, quando já sedimentada histórico-culturalmente, a linguagem proposicional sustenta-se em uma estrutura. E, quando em processo de se edificar, a estrutura, fruto dos modos repetidos de dizer de uma comunidade, permanece sobre. Seria assim, mais claro se se falasse em sub/sobrejaz".

como igual mas como universal."[77]. Com isto, o autor quer dizer que a formação das repetições não se dá por comparação, no sentido de que seja preciso conhecer-se todas as possíveis variações e depois tomar aquilo que fosse igual em todas, ou contrário disto, a repetição se dá mediante aquilo que está e é nuclear em qualquer variação, mesmo naquelas de que não tenhamos conhecimento. Essa afirmação fenomenológica é decorrente do fato de as idealidades terem como solo constituinte o *Lebenswelt* (o mundo-vida). Esse nuclear é que constitui a *intersubjetividade*.

Portanto, a *intersubjetividade* já está presente enquanto possibilidade na relação intencional homem-mundo no âmbito da evidência subjetiva que cobre a esfera noemática. A *intersubjetividade* se dá no horizonte de mundo que é de um, mas que também é do outro, pela empatia.

É preciso, porém, considerar que a *objetividade* de uma *formação ideal* dá-se no decorrer de um tempo - individual e comunitário - que extrapola a temporalidade das existências. Assim, a *objetividade* de uma *formação ideal* precisa estar apta a uma recompreensão em sua transmissibilidade, isto quer dizer que algo dela permanece, de alguma forma, no mundo-horizonte. Para HUSSERL, a transmissibilidade acontece na forma de linguagem escrita, na expressão lingüística documentada, que eleva todo o legado humano a um novo nível.

> /.../ com a escrita mantém-se a possibilidade de ser reativada a evidência da reunião de experiências aparentemente desarticuladas, expressa pelo sujeito que originariamente viu e expôs essa articulação.[78]

Porém, a aproximação da linguagem como fonte de conhecimento não pode ser realizada de maneira ingênua, entregue à tentação lingüística que restringe o entendimento à elaboração de associações regidas pela Lógica da própria linguagem. Sem dúvida, o entendimento associativo propicia a reativação de um originário, porém um originário que é próprio da Lógica

---

[77]"In der Einheit der Mitteillungsgemeinschaft mehrerer Personen wird das wiederholt erzeugte Gebilde nicht als gleiches sondern als das eine Allgemeinsame bewusst." HUSSERL, Edmund. *Die Urstifung und das Problem der Dauer. Der Ursprung der Geometrie, op. cit.*, p. 445.

[78] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Tempo, tempo vivido e história, op. cit.*, p. 67.

presente na linguagem e não necessariamente daquilo que ela expressa, e que, contudo, também inaugura uma transmissão deste seu originado específico. Segundo HUSSERL esta é a razão porque as disciplinas matemáticas hoje estudadas encontram-se tão longe de seu sentido originário, aquele do mundo-vida que se dá na relação intencional homem-mundo. O que transmitem refere-se, muitas vezes, à Lógica, porque as disciplinas matemáticas estão inseridas nas chamadas disciplinas dedutivas, nas quais a seqüência ocorre em forma de conseqüência. Ele chama a atenção para o fato de que:

> A evidência originária não pode ser confundida com a evidência dos axiomas; pois os axiomas são, em princípio, resultados da formação de sentido originários e já têm evidência originária atrás de si. [79]

É então necessário um entendimento das disciplinas matemáticas que reative o sentido originário, mediado necessariamente pela linguagem, pois os símbolos da escrita são experenciados corporeamente em seus sentidos e em possibilidade contínua de experienciar a *intersubjetividade* concomitantemente. Existe, portanto, uma passividade lingüística que pode ser transformada com a finalidade de reativar a evidência do sedimentado.

No caso das disciplinas matemáticas que tratam de *objetos ideais*, o sedimentar e o reativar produzem idealidades em nível superior. Como compreendê-las sem reativar os níveis de conhecimento anteriores? Como considerar todo esse conhecimento? Qual é a possibilidade da reativação das disciplinas matemáticas entendidas como ciência dedutiva, mesmo que elas não só deduzam? Como ultrapassar o encadeamento lógico dedutivo?

Para HUSSERL, vale a lei fundamental que afirma: caso as premissas sejam realmente reativadas até a *evidência originária*, assim também serão suas conseqüências evidentes e, uma vez isto realizado, surgirá aquilo que precisa ser produzido da *evidência originária* por meio da cadeia da Lógica, tal qual a fenomenologia a compreende. De modo breve, há que se perceber o sentido do transmitido. Voltaremos a esse assunto nos próximos capítulos.

---

[79] "Ursprüngliche Evidenz darf nicht mit der Evidenz der "Axiome" verwechselt werden; denn Axiome sind prinzipiell schon Resultate ursprünglicher Sinnbildung una haben diese selbst immer schon hinter sich". HUSSERL, Edmund. *Die Urstifung und das Problem der Dauer. Der Ursprung der Geometrie, op. cit.*, p. 450.

HUSSERL afirma que esta hipótese, da lei fundamental, dificilmente é executada. Basta observar o que se aprende nas aulas de geometria, por exemplo. Lida-se com conceitos prontos e asserções em métodos rígidos, pois na ilustração sensível dos conceitos, na figura do desenho, esconde-se o que fez com que a idealidade viesse a ser realizada, em sua forma originária. O que na verdade se evidencia é o resultado prático da geometria prática. Já na hereditariedade das asserções e do método podem ser formadas novas idealidades lógicas que permanecem, através do tempo, sem interrupção, porém sem herdar a reativação do começo e nem tampouco tocar o material que deu a toda assserção, a toda teoria o sentido evidente e originário.

A tradição Lógica, quando tomada isoladamente, apresenta-se intransponível. Porém, ao considerá-la como constituinte do horizonte da humanidade e do mundo, no horizonte histórico atual, não só ela está presente como também os homens atuais. Portanto, a estrutura de ser deste horizonte – homem e tradição Lógica pode ser revelada pela interrogação metódica que apresentará possíveis perguntas reveladoras de seu modo de ser e que conduzem em direção à origem, na maneira da retrospectividade.

> Aqui nós seremos, assim por dizer, conduzidos retrospectivamente para o material originário da formação de sentido, para as premissas originárias.[80]

Desta forma, HUSSERL propõe uma historicidade do correlato modo de ser da humanidade, do mundo cultural e da *estrutura* A*priori*[81] transmitida nessa historicidade. O presente cultural é entendido como uma totalidade na qual está implícito um passado cultural, ou seja, está implícito no presente cultural uma continuidade veiculada pelas compreensões das realizações de outros passados, incluindo aqui dúvidas, pontos de vista e até opostos, conteúdos ideológicos, e eles, por sua vez, já foram um presente cultural que passou.

---

[80] "Hier werden wir auf die Urmaterial der ersten Sinnbildung, auf die Urprämissen sozusagen zurückgefürt, die in der vorwissenschaftlichen Kultur liegen." *Idem, ibidem*, p. 454.

[81] Nota da autora: *Apriori* é uma palavra usada por Husserl para designar o "a priori sintético" transmitido na temporalidade. *Estrutura Apriori* é a estrutura como presença. Estrutura dada na relação intencional homem-mundo, primado da objetividade ideal.

> E essa continuidade geral é uma unidade do tornar-se tradição até o presente, aquele que é nosso, e é um tornar-se tradição em vitalidade fluida e permanente. [82]

Compreender as disciplinas matemáticas nesta perspectiva da retrospectividade é compreender o que foi construído e transmitido nelas, e sua maneira de ser. Seu sentido ocorre nas realizações de todos os herdeiros desta sabedoria, independente da finalidade de suas realizações, quer seja como Matemática pura, quer seja como Matemática aplicada, quer seja como Matemática compreendida no ato de apreender na disciplina.

Ao perguntar-se pelo sentido original do transmitido e depois pela disciplina validada e aperfeiçoada com este sentido, revelar-se-á a sua tradição histórica, evitando que este conhecimento caia num discurso vazio ou em uma generalidade não diferenciada que *nada sabe de sua fonte*.

Esta maneira de investigação quando

> /../ realizada sistematicamente, resulta em nada mais nada menos do que o A*priori universal da história* em suas mais altas e abundantes estabilidade.[83]

A afirmação de HUSSERL:

> História é, desde o começo, nada mais do que o movimento vivo de formação original de sentido e de sedimentação de sentido, de um com o outro e de um no outro [84],

não pode ser entendida como uma movimentação do nada que se dirige ao infinito. A História, assim como o conhecimento humano, tem um começo que se revela nas realizações humanas, portanto, a História assim compreendida,

---

[82] "Und diese gesamte Kontinuität ist eine Einheit der Traditionalisierung bis zur Gegenwart, die die unsere ist, und ist als sich selbst in strömend-stehender Lebendigkeit Traditionalisieren." HUSSERL, Edmund. Die Urstiftung und das Problem der Dauer. Der Ursprung der Geometrie, *op. cit.*, p. 456.

[83] "Systematisch durchgefürt, ergeben sie nichts anders und nichts minderes als das universale Apriori der Geschichte in seinen höchst reichhaltigen Beständen." *Idem*, *ibidem*, p. 456.

[84] "Geschichte ist von vornherein nichts anderes als die lebendige Bewegung des Miteinander und Ineinander von ursprünglicher Sinnbildung und Sinnsedimentierung." HUSSERL, Edmund. *Die Urstiftung und das Problem der Dauer. Idem, ibidem,* p. 457.

faz temático o solo de sentido geral e investiga, o A*priori* histórico, a fim de referir-se ao histórico presente geral, pois:

> Somente a revelação da estrutura essencial geral encontrada, em totalidade e como tal em nosso e então no de qualquer passado ou futuro presente histórico; somente na revelação do concreto tempo histórico, no qual nós vivemos, no qual a nossa humanidade toda vive, em relação a sua estrutura essencial total, somente esta revelação pode realmente possibilitar história compreensível, inteligente, em certo sentido científica. Este é o concreto A*priori* histórico, que toma todo o existente como tradição e transmissão, em histórico Ser do passado ou em histórico Ser do futuro ou em seu ser essencial.[85]

A aparência inatingível da origem das realizações e do A*priori* histórico, dilui-se ao reconhecer-se enquanto homem no presente como sendo um ser humano de historicidade universal. Este presente agora vivido é horizonte aberto ao conhecimento histórico passado, é no presente que começa a viagem em direção à origem, e isto não quer dizer que a origem esteja aquém do horizonte presente, fora do campo intencional.

A trajetória investigativa orientada pela interrogação realiza um movimento interpretativo hermenêutico revelando o mundo-vida, o *Lebenswelt,* como texto do horizonte histórico matemático que é o mesmo, hoje e sempre.

A compreensão do mundo-vida possibilita a passagem pelas universalidades formais, advindas da Lógica, tornando o apodítico como tema e, finalmente, pode-se galgar o pré-científico do estabelecimento das disciplinas matemáticas e disponibilizar o material utilizado para a idealização, em seus mais variados níveis presentes no horizonte da historicidade.

Posto isso, a trajetória investigativa é conduzida pela retrospectividade porque há de se compreender as realizações anteriores com a intenção atual de conhecer os acontecimentos da relação intencional homem-mundo que

---

[85]" Nur die Enthüllung der in unserer und dann in jeder vergangenen oder künftigen historischen Gegenwart als solcher liegenden wesensallgemeinen Struktur und, in Totalität, nur in Enthüllung der konkreten historischen Zeit, in der wir leben, in der unsere Allmenschheit lebt, hinsichtlich ihrer totalen wesensallgemeinen Struktur, nur

possibilitaram e ainda possibilitam as evidências. Isto porque, aqueles que vivenciaram as *evidências originárias* transmitidas pela tradição, não estão, muitas vezes, entre nós para dizer o que deles gostaríamos de ouvir. Porém, alguns deles deixaram suas realizações, suas obras, moradas de evidências e possibilidades da experiência hermenêutica, pela *intersubjetividade*.

Assim, a retrospectividade não busca nada fora, quer no sentido temporal quer no sentido espacial. Ela propõe uma ordenação na direção posta pela interrogação, coerente com o modo de ser da construção dos objetos da Matemática. A retrospectividade tem a finalidade de evitar que se perca no labirinto da mina Matemática, criando-se arbitrariedades e supondo-se falsos pré-requisitos.

Portanto, ao perseguir a interrrogação: *como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da álgebra?* na intenção de revelar o Apriori universal das estruturas da Álgebra na perspectiva fenomenológica, pode-se revelar o modo de ser das estruturas da Álgebra e o pensar da comunidade humana que a realizou. Esta comunidade humana, não está, necessariamente, enclausurada em um espaço/tempo determinado.

Tomar as *estruturas da Álgebra* como uma *formação ideal* é tomá-las em sua temporalidade. As *estruturas da Álgebra* foram sendo presentes históricos passados que ao mesmo tempo foram sendo horizonte de futuros e imagens de uma estrutura A*priori* sedimentada em sua historicidade.

Pesquisar o A*priori universal histórico das estruturas da Álgebra* é, em última análise, inquerir sistematicamente sobre o sentido *das estruturas da Álgebra* em sua origem, ou seja, inquerir sobre a *estrutura Apriori* e de que maneira ela, como necessidade constituinte, precisou ser presente, passando retrospectivamente pelo que foi empaticamente reativado, epistemologicamente validado e culturalmente sedimentado.

O texto de HUSSERL é muito relevante para os procedimentos dessa pesquisa, pois explicita a tradição matemática como uma experiência hermenêutica, retoma a *consciência da história efeitual*, quando busca compreender os possíveis efeitos e projeções que a Lógica realiza no modo

---

diese Entfüllung kann wirklich verstehende Historie, einsichtige, im eigentlichen Sinn de se explicitar a Matemática obscurecendo os sentidos sedimentados e, mais especificamente, o sentido originário. Mais do que isto, o texto aponta para a retrospectividade, dando um norte não só para a trajetória dessa pesquisa, mas também para a construção de uma história das Ciências com sentido compreensível e inteligível ao propor um história explicitada por alguém que a construa sem sair de seu horizonte e de sua relação intencional com o mundo.

Pode-se ainda perguntar: Por que seria importante a construção de uma História da Matemática que intencione o A*priori universal das estruturas da Álgebra, ou a estrutura Apriori das estruturas da Álgebra?*

Embora essa pergunta não tenha relação direta com as interrogações que sucitaram a busca do texto de HUSSERL na construção dos procedimentos dessa pesquisa, ela é relevante para a Educação Matemática e, portanto, deve ser abordada.

A proposta de construir-se uma história que considere os nexos da história *das estruturas da Álgebra* pode contribuir com a elaboração de uma resposta para a necessidade, já anunciada, no campo da Educação Matemática, do uso da História da Matemática como recurso didático. MIGUEL ao analisar as potencialidades pedagógicas da História da Matemática termina seu artigo dizendo:

> Para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. /../ Somente uma história da matemática pedagogicamente orientada, isto é, uma história viva, humana, esclarecedora e dinâmica, vindo substituir as enfadonhas histórias evolutivas das idéias matemáticas, quase sempre desligadas das necessidades externas e/ou internas que estiveram na base de sua origem e transformação, poderia constituir-se em ponto de referência para uma prática pedagógica problematizadora em matemática que tivesse por meta uma problematização, entendida como simultaneamente

wissenschatliche ermöglichen." *Idem*, *ibidem*, p. 457.

lógica, epistemológica, metodológica, psicológica, sociológica, política, ética, estética e didática.[86]

[86] MIGUEL, Antonio. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. ZETETIKÉ, Campinas, Vol. 5 Nº 8 – Julho/dezembro de 1997, p. 101-103.

Capítulo III

A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DAS ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA EM EPOCHÉ

Ao perseguir a direção dada pela interrogação *como se revela o pensar no movimento da construção/produção do conhecimento das estruturas da Álgebra?* na perspectiva das idéias fenomenológicas, depara-se com uma análise do *pensar* que resgata seu significado de *cogitare* e *intelligere* como compreensão. Compreensão aqui entendida como realização da *presença* que tem seu primado na relação intencional homem-mundo. Essa relação se caracteriza como sendo uma comunhão das possibilidades do homem, enquanto ser de historicidade, entrelaçada com as possibilidades de ser do mundo percebido, instituído e construído. Portanto, essa comunhão de possibilidades leva em conta o *ser* e o *vir a ser* das *presenças*.

Em conseqüência dessas articulações, *pensar* é desde o início *presença* e *compreensão* que não se restringem ao subjetivo, entendido como concernente aos aspectos psicológicos presentes no modo particular de ser de outros comportamentos humanos. O *pensar*, em sua potencialidade de tornar possível os pensamentos, ao abranger o ser das presenças, homem e mundo, contempla tanto a natureza daquilo que se compreende do mundo, como a natureza humana, conservando, assim, a coerência com a natureza das partes envolvidas.

Dada a proposta da pesquisa de investigar o *pensar* que se revela no movimento da construção do conhecimento *das estruturas da Álgebra* no terreno da fenomenologia, é imprescindível, ao ter-se como meta a explicitação desse *pensar*, a reconstrução *das estruturas da Álgebra* vistas no fluxo temporal de sua existência como um objeto não-independente das ações humanas e que se revelam no movimento da construção/produção de seu conhecimento enquanto compreensão; portanto, vivência e ato de construir pensamentos.

Esse movimento de construção/produção *das estruturas da Álgebra*, entendidas como tradição, torna-se, ele próprio um fenômeno a ser compreendido e, portanto, pode ser colocado em *epoché,* tornando-se objeto da *análise intencional* na proposta da *hermenêutica filosófica* norteada pela interrogação: *como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra?*

Essa *análise intencional* é efetuada para que se dê a *consciência da história efeitual das estruturas da Álgebra* e para que a luz do seu todo enigmático possa vir clarear aspectos que lhe são próprios e que constituem sua autoctonia, revelando invariantes do modo como se dá a superação da *experiência negativa* no desenrolar da construção de seu conhecimento.

A meta a ser cumprida, nesta etapa do trabalho, é a de elaborar uma descrição, que explicite o movimento da construção/produção do conhecimento *das estruturas da Álgebra* em termos de possíveis atividades matemáticas que tecem um filão intencional e revelador das *estruturas da Álgebra*. Um filão que comporta um conteúdo de sentido revelado no nexo histórico construído no âmbito da Matemática ocidental e, portanto, transmissor do *Apriori universal histórico* da tradição na qual está inserida.

Para que os nexos históricos da Matemática, compreendidos e pensados como *sínteses de transição* ao se realizar a análise, conservem suas coerências internas, o movimento da construção/produção do conhecimento *das estruturas* será apresentado como um todo, em um só texto contendo dois momentos distintos da análise.

O primeiro momento tem como meta explicitar a construção/produção do conhecimento *das estruturas da Álgebra*. O texto construído nesse movimento de explicitação constituirá o solo do segundo momento da análise ao buscar-se compreender o texto-solo na *estrutura da pergunta e da resposta*, segundo a abordagem gadameriana. Trata-se de uma leitura hermenêutica do texto-solo na intenção de compreender o seu sentido e de formular as perguntas que esse texto-solo responde sobre a construção/produção do conhecimento *das estruturas* investigadas, na intenção de revelar os invariantes dessa construção/produção.

Por uma questão de praticidade e de estética de apresentação dos dois momentos de análise, as perguntas, que o texto-solo responde, estarão escritas ao lado do trecho do texto-solo correspondente.

1. A CONSTRUÇÃO DO TEXTO-SOLO E COMPREENSÃO DA ESTRUTURA DA PERGUNTA DA RESPOSTA

> Se o método ao investigar controla e manipula, na dialética é o tema que levanta as questões a que irá responder. Por sua vez, a situação interpretativa não é aquela da pessoa que interroga e constrói um método que lhe torne acessível o objeto interrogado; ao contrário, aquele que interroga descobre-se como o ser que é interrogado pelo tema; é ainda uma dialética entre o contexto no qual o sujeito se insere e contexto de tradição.
>
> Vitória Helena Cunha Espósito

Para a elaboração desse texto-solo, textos sobre a História da Matemática, de Matemática e textos que descrevam a construção/produção do conhecimento das estruturas e que apresentem respostas às questões que venham ser postas no caminhar da reconstrução retrospectiva *das estruturas da Álgebra* são analisados hermeneuticamente.

A retrospectividade, conforme interpretada no texto de HUSSERL e entrelaçada às idéias de HEIDEGGER e de GADAMER, se dá em torno de interrogações que contemplem a natureza daquilo que deve ser compreendido no fluxo temporal efetuando uma compreensão *na estrutura da pergunta e da resposta.* Portanto, a retrospectividade é algo a ser tecido de modo articulado com o que já se sabe do pesquisado no presente.

Assim, ao efetuar o movimento de buscar as características básicas *das estruturas da Álgebra*, parte-se do momento presente. Pergunta-se o que está disponível no mundo hoje que diz respeito à*s estruturas* no campo do conhecimento matemático, tomado na realidade da civilização ocidental.

1.1. AS ESTRUTURAS NO PRESENTE HISTÓRICO

> É no curso desse desenvolvimento que os matemáticos desse período se vêem conduzidos insensivelmente, e não de propósito deliberado, a conceber uma quantidade de seres "abstratos" novos: espaço de dimensão arbitrária, estruturas algébricas e topológicas variadas, etc., que tinham apenas umas tênues ligações com as noções clássicas de "número" e de "figura", mas sem os quais os resultados novos não poderiam adquirir toda a sua importância.
>
> J. Dieudonné

É incontestável a posição central e irreversível do conceito de *estruturas* no corpo de conhecimento da Matemática ocidental quando consideramos o seu significado, suas implicações e suas aplicações nos diversos campos da Matemática e da ciência em geral.

Afirma-se, aqui, a irreversibilidade do conceito de estruturas, porque uma vez presente no mundo, e no caso específico no mundo da matemática, ele já modifica o texto todo dessa ciência, pois *está aí*, como se apresenta hoje, à moda de um passado/presente. Isso porque, apresenta-se ao enrolar-se nas camadas do que foi (passado) e coloca-se no presente de maneira atual em seu modo carnal de ser, isto é, nas suas características materiais de presença, colocando possibilidades para o que poderá ser, ou seja, possíveis desdobramentos no futuro, dentre os quais seu desaparecimento como idéia central, porém sempre estando no solo que fertilizou essas possibilidades futuras.

O afirmado é perceptível, quando atentamos para o solo histórico em que a cultura ocidental, e nela toda a produção de ciência e técnicas que foram possíveis de serem desenvolvidas e aplicadas, nesse solo, a Matemática comparece como um "exemplar", a ser seguido.

Depois do reconhecimento do conceito de estrutura no âmbito da Álgebra em 1930, vários artigos colocavam *as estruturas da Álgebra* como sendo a revelação de um novo espírito da Álgebra. A abordagem estrutural provocou uma reestruturação da própria Álgebra, que vai muito além da ampliação do domínio da disciplina. Muitos problemas matemáticos até então não resolvidos, como a aceitação matemática dos números imaginários, as questões que envolviam o método de resolução de equações por radicais, são solucionados nesta nova conjuntura algébrica, de forma econômica e elegante. A abordagem estrutural integra, nessa nova perspectiva, soluções e resultados matemáticos já instituídos [1 P1]. Por exemplo, a expansão de resultados matemáticos sobre divisibilidade numérica, já apontadas no trabalho de Euclides (306 – 283 a.C.), para a divisibilidade de polinômios. Assim, por meio das *estruturas da Álgebra* pôde-se explicitar aquilo que era semelhante entre distintas coleções de um mesmo objeto matemático e entre objetos matemáticos distintos.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Com a implementação, cada vez mais crescente, da abordagem estrutural da Álgebra nos vários campos da Matemática, surge, em meados de 1940, uma nova concepção da natureza, do objetivo e da organização do todo da Matemática. Nesta nova visão, as estruturas matemáticas ganham destaque, tornam-se objetos da investigação matemática [2 P1]. As teorias matemáticas que surgem em torno do questionamento: *o que é a estrutura matemática?* são teorias reflexivas, elaboradas para compreender as estruturas matemáticas, tomadas neste projeto, como o conteúdo objetivo do conhecimento matemático em geral. Nota-se, que a perplexidade dos matemáticos manifesta-se em termos de não saberem o que é isto, a estrutura matemática [1 P3].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Estas teorias perseguiam a meta de elucidar conceitos abstratos e generalizados, que constituíam o seu conteúdo objetivo de Matemática, formulando generalização de segunda ordem, modelada na mesma perspectiva matemática em que a primeira generalização foi constituída. Cada teoria tomou para si um conteúdo objetivo e seu concomitante caminho de desenvolvimento [1 P2]. Aqui serão trabalhadas três teorias: a *Teoria das Estruturas de Ore*, a *Teoria das Categorias* e a *Teoria das Estruturas de*

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Bourbaki. Elas serão pontuadas em seus objetivos, em seus fundamentos, e possíveis articulações posteriores com outras teorias, pois elas se articulam com conceitos ou resultados advindos da Álgebra.

A *Teoria das Estruturas de Oystein Ore* é uma tentativa de desenvolver uma fundamentação geral para toda Álgebra Abstrata, usando a noção de reticulados, na mesma trilha seguida por DEDEKIND (1831 – 1916) iniciada em seu artigo *Dualgruppen.* Nesse artigo, DEDEKIND, estuda séries numéricas sob a perspectiva da relação de ordem, que desemboca na *Teoria dos Ideais*.

ORE acreditava na existência de um único conceito geral, do qual derivariam teoremas equivalentes, simultaneamente válidos em diferentes domínios algébricos [2 P3]. Este conceito geral, ele chamou de *estruturas* e o apresentou em seu artigo datado de 1935 publicado em *Annals of Mathematics*. Seu trabalho contribuiu muito para o desenvolvimento da Álgebra Universal, que é uma formulação direta de uma idéia não formal de estrutura algébrica, que inclui um conjunto não-vazio e uma lista de infinitas relações abstratas definidas nesse conjunto [3 P1].

> Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Em 1950, a pesquisa da Álgebra Universal enreda-se com instrumentos da Lógica Matemática, dando origem à *Teoria dos Modelos* (Model Theory), cuja proposta é analisar as relações entre sistemas de postulados abstratos e sistemas matemáticos. Os primeiros sendo aqui compreendidos como qualquer sistema de postulados abstratos, como por exemplo, aqueles que descrevem leis da Física, da Química e outros. Os segundos, concernentes à região de inquérito da Matemática em suas particularidades.

O desenvolvimento da *Teoria dos Modelos* possibilita uma compreensão da natureza e classificação das estruturas matemáticas. Na ciência historiográfica, é considerada como parte da História da Lógica.

Em 1960, a Álgebra Universal emaranha-se à *Teoria das Categorias*, passando a com ela constituir o âmago de seu conceito principal, o de *categoria*. Com isso, são gerados resultados comuns às duas teorias. A primeira parceria da pesquisa teórica dos reticulados e da teoria reflexiva das estruturas é associada ao trabalho de Marshall Stone (1903 – 1989) sobre

Álgebras Booleanas e sua influência na origem da *Teoria das Categorias*, elaborada desde 1945 por Eilenberg e Saunders Mac Lane.

O objetivo desse trabalho é prover uma fundamentação para toda Matemática, em termos do conceito de categoria [4 P1].

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

A *Teoria das Categorias* provê instrumentos e uma perspectiva conveniente para elucidar as noções não formais de *estrutura* do ponto de vista de uma matemática formal. O conceito de *categoria* formaliza a idéia de um domínio matemático, enquanto o conceito de *funtor* formaliza a conexão entre dois domínios matemáticos diferentes. A idéia central desta teoria é que os domínios matemáticos não precisam ser necessariamente descritos pelas características comuns de seus constituintes. Podem ser examinados pelas conexões entre os seus constituintes [5 P1]. A *Teoria das Categorias*, então, estuda as propriedades das conexões que ligam diversos objetos.

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

> A abordagem categorial vai um passo além e propõe que não somente a natureza do elemento seja desconsiderada, mas também, assim como na teoria das estruturas, sua existência real.[87]

Por causa da originalidade do objeto de estudo da *Teoria das Categorias*, nasce uma nova linguagem. As noções e as operações, então definidas em termos estruturais, são explicitadas na forma de diagramas comutativos [6 P1].

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

> Dada uma categoria Γ e dois objetos X, Y nesta categoria, um "produto" de X e Y na categoria é um objeto P junto com duas flechas p, q
>
> $$X \xleftarrow{\;p\;} P \xrightarrow{\;q\;} Y$$
>
> tal que dado qualquer objeto Z em Γ e duas flechas $g:Z \to Y$, $f:Z \to X$ existe uma única flecha $h:Z \to P$, tal que $p \circ h = f$ e

[87] The categorial approach goes one step further, and proposes to overlook not only the nature of the elements, but also, as in the theory of structures, their very existentence. CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Basel, Boston. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1996, p.344.

$q \circ h = g$. Em outra palavras, o seguinte diagrama é comutativo:[88]

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

A *Teoria das Categorias* pode explicitar vários campos da Matemática, ressaltando sua capacidade teórica unificadora [7 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Agora será focalizada a teoria reflexiva mais conhecida, a *Teoria das Estruturas de Bourbaki*, que aparece entre 1942 e 1959. Ela empreende, segundo RENÉ THOM, a tarefa de reorganizar a Matemática em termos de componentes estruturais básicos segundo uma forma hierárquica. Na visão do grupo de matemáticos que desenvolveram tal reflexão sobre as estruturas matemáticas sob o pseudônimo de Nicholas Bourbaki, a Matemática deveria deixar de ser uma torre de Babel, na qual disciplinas autônomas teriam seus objetivos, seu método e sua linguagem próprios.

Dois eram os princípios norteadores dessa reflexão. Primeiro, o de que a Matemática seria um todo indivisível, compactuando com as idéias já colocadas por HILBERT na lista de 1900, sobre os 23 problemas apontados como os que orientariam as pesquisas matemáticas do segundo milênio e, em segundo lugar, o princípio de que a Matemática poderia ser organizada como hierarquia de estruturas, seguindo o modelo indiscutível apresentado por VAN DER WAERDEN, em 1930, que deixava claro o que deveria ser entendido por estrutura algébrica e por pesquisa estrutural em Álgebra [8 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

[88] Given a categoriy Γ and two objects X, Y in that category a "product" of X and Y in the category is an object P together with two arrows p, q (desenho) such that given any object Z in Γ, and two arrows $g: Z \to Y$, $f: Z \to X$ there exists a unique arrow $h: Z \to P$ such that $p \circ h = f$ and $q \circ h = g$. In other words, the followig diagram is required to be commutative: (desenho). *Idem*, *ibidem*, p. 348.

Da união dos dois princípios e da forma axiomática de articular as idéias herdadas, tanto de HILBERT como de VAN DER WAERDEN, surge uma perspectiva convincente que é adotada por diversas áreas do conhecimento, mesmo por aquelas que aparentemente nada teriam a ver com a Matemática e nem tampouco teriam recursos teóricos próprios para compreender o sentido matemático de estrutura e sua ligação com uma teoria matemática formal. Um clássico exemplo é encontrado na área de conhecimento da Psicologia, nos trabalhos de PIAGET que assim foi analisado por FREUDENTAL:

> O mais espetacular exemplo de organização matemática é, certamente, Bourbaki. Como esta organização matemática é convincente! Tão convincente que Piaget pode redescobir o sistema de Bourbaki no desenvolvimento psicológico. Pobre Piaget! Ele não teve mais sorte que Kant, que consagrou abertamente o espaço Euclidiano como " uma intuição" pura quando a geometria não-euclidiana era descoberta! Piaget não era matemático, assim não poderia saber como os construtores dos sitemas matemáticos são falíveis. O sistema de Bourbaki ainda não estava concluído quando a importância das categorias era descoberta. [89]

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Durante o desenvolvimento da *Teoria das Estruturas de Bourbaki*, o grupo assimila de forma crescente e dominante o método axiomático, fazendo com que a elaboração de uma reflexão formal axiomática da idéia de *estruturas matemáticas* não só compreendesse um arcabouço de referências gerais, mas também a finalidade das *estruturas matemáticas* [3 P3]. Como conseqüência, a Matemática passa a ser vista como a ciência dos sistemas axiomáticos, chamando a atenção dos filósofos que passam a combatê-la no âmago de sua forma de organização. Os filósofos consideram, então, alguns dos sistemas apresentados pelo grupo BOURBAKI

[89] The most spectacular example de organizing mathematics is, of course, Bourbaki. How convincing this organization of mathematics is! So convincing that Piaget could rediscover Bourbaki`s systm in developmental psychology. Poor Piage! He did not fare much better than Kant, who had barely consecrated Euclidean space as "a pure intuition" when non-Euclidean geometry was discovered! Piage is not a mathematician, so he could not know how unreliable mathematical system builders are. Bourbaki`s system of mathematics was not accomplished when a importance of categories was discovered. FREUDENTAL, Hans. *Mathematics as an educational task.* Dorbrecht: The Netherlands by D. Reidel, 1973, p. 46.

como "axiomática sem valor". Um dos mais importantes representantes do grupo, DIEUDONNÉ, declara:

> Fundamentalmente nós acreditamos na realidade da Matemática, mas quando os filósofos nos atacam com seus paradoxos, nós nos ocultamos rapidamente atrás do formalismo e dizemos: "Matemática é justamente uma combinação de símbolos sem sentido" e então nós mostramos nos capítulos 1 e 2 [dos Eléments] a Teoria dos Conjuntos. Finalmente nós estamos em paz para voltar a nossa Matemática e fazermos isto como sempre fizemos, trabalhando em coisas reais.[90] [4 P3]

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Esta declaração permite a seguinte análise: caso a *Teoria dos Conjuntos* tenha sido desenvolvida somente para veicular e alcançar os objetivos propostos pelo grupo BOURBAKI, razão pela qual seria necessário desenvolver uma linguagem matemática que incorporasse os princípios norteadores e fornecesse conceitos sob os quais deveria ser consolidado o todo matemático, ainda assim ela também cumpriu a função de escudo teórico para abrandar críticas.

Porém, segundo CORRY[91], a *Teoria das Estruturas* aparece somente no quarto capítulo do livro sobre a *Teoria dos Conjuntos*. <u>A definição de estrutura é apresentada, da perspectiva da *Teoria dos Conjuntos*, pela caracterização dos elementos do conjunto por meio de axiomas e a lei de composição interna é definida como uma função</u> [9 P1]. Além disso, são ainda apresentados os primeiros conceitos vinculados à definição de estrutura: isomorfismo, espécies equivalentes de estruturas. Porém, os primeiros conceitos definidos não aparecem nos trabalhos vindouros do grupo.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

---

[90] On foundations we believe in the reality of mathematics, but of course when philosophers attack us with their paradoxes, we run to hide behind formalism and say: "Mathematics is just a combination of meaningless symbols" and then we bring out chapters 1 and 2 [of the Eléments] on Set Theory. Finally we are left in peace to go back to our mathematics and do it as we have always done, working in something real. (Dieudonné 1970,145). CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures. Op. cit*, p. 314.

[91] *Idem*, *ibidem*, Capítulo 7, p. 293.

Em Topologia Geral apresenta-se um modelo derivado de uma definição de *estrutura*, a *estrutura-mãe*, que não é desenvolvido a partir dos conceitos relacionados com a definição de *estrutura* posta na *Teoria dos Conjuntos*. Assim prevalece, “no final das contas”, na perspectiva da análise, que a maior atuação da *Teoria dos Conjuntos* não foi a de prover fundamentos à teoria reflexiva do grupo Bourbaki.

Nenhuma das três teorias aqui apresentadas alcançou definitivamente seu objetivo, que era o da unificação da Matemática. Pelo contrário, alguns estudiosos se convenceram da missão impossível que se haviam imposto, como MAC LANE, que afirma ser a realidade matemática muito mais variada que tudo aquilo que uma teoria generalizada pode exaurir.

Porém, as teorias reflexivas mostram que a Matemática ganha um novo impulso ao tomar as estruturas matemáticas como seu objeto de investigação. Ao tratarem as estruturas não só pelas possíveis propriedades de seus pretensos elementos, mas também pelas possíveis relações destes elementos, a Matemática não só pode corresponder a uma situação dada, mas também pode corresponder a uma situação passível de ser dada. A Matemática ganha espaços aplicativos porque possui um instrumental que possibilita a realização de *modos de descrição* de comportamentos orgânicos e inorgânicos, sem mesmo tê-los como possível ou existentes na natureza. A *estrutura* impõe-se e o conceito de *estrutura*, que origina-se na Matemática, penetra cada vez mais outras regiões [10 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

> A orientação dada hoje para a pesquisa das estruturas – tanto como objetivo de pesquisa quanto como método de pesquisa – de modo algum se restringe à Matemática, mas tornou-se, de modo geral, em um pensamento guia nas avaliações e prognóstico da ciência moderna.[92]

[92] Die Orientierung auf die Erforschung von Strukturen tritt dabei heute – sowohl als Forschungsziel wie als Forschungsmethode – keineswegs nur in der Mathematik auf, sondern ist ganz allgemein zu einem Leitgedanken bei der Einschätzung und Prognose der modernen Naturwissenschaft geworden. WUSSING, H. *Die Genesis des abstrakten Gruppen Begriffes*. Berlin: Verlag der Wissenschaften, 1969, p. 9.

1.2. SOBRE O MOVIMENTO DA CONSTRUÇÃO/PRODUÇÃO DAS ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA

Dios siempre arimetiza.
Jacobi, alemão, 1804 – 1851

Deus criou os inteiros, o resto é obra do homem.
Leopoldo Kronecker, alemão,1823 – 1891

El hombre siempre arimetiza.
Dedekind, alemão, 1831-1916

A essência da Matemática é sua liberdade.
Cantor, alemão, 1845 – 1918[93]

As considerações tecidas sobre as articulações das *estruturas* no campo da Matemática no *presente histórico* com as *estruturas* no campo da Àlgebra em torno de seus conceitos e modos de construção, denotam a importância do significado, das implicações e das aplicações das *estruturas da Álgebra* nos diversos campos do conhecimento humano, inclusive no da própria Matemática que é seu habitat natural.

As perguntas que se apresentam ao ter-se como objetivo pontuar as circunstâncias mais relevantes *das estruturas da Álgebra* como foco temático no contexto de sua construção/produção são: Como apropriar-se do "porque matemático" de suas implicações? Qual a importância deste "porque matemático" para a matemática enquanto ciência, para a história, enquanto História da Matemática e para a Educação, enquanto Educação Matemática? CORRY responde a algumas destas questões em termos de *corpo de conhecimento* e *imagem de conhecimento*.

Para o autor, as disciplinas científicas tratam de dois tipos de questões. As questões referentes ao conteúdo objetivo da disciplina e as questões sobre a própria disciplina. As respostas ao primeiro tipo são encontradas nas atividades constituídas pelo objetivo da disciplina e por aqueles que a

[93] As epígrafes são uma homenagem e uma demonstração de respeito a todos os homens que apesar de suas concepções de Matemática e de sua maneira de fazer matemática, contribuíram para com o seu desenvolvimento.

praticam, enquanto as do segundo tipo podem dar-se individualmente, com a presença implícita ou tácita de outros que a ignoram totalmente. Os dois tipos de questões definem dois domínios de discursos, aquele relativo ao *corpo de conhecimento* e aquele da *imagem do conhecimento*.

O domínio de discurso do *corpo de conhecimento* inclui afirmações sobre o conteúdo objetivo da disciplina, ou seja, quando as questões referem-se à teoria, fatos, métodos ou quando as questões abrem problemas implícitos na disciplina. O domínio de discurso da *imagem do conhecimento* trata das questões que surgem no *corpo de conhecimento* e que não podem ser respondidas em seu interior, assim como trata das questões referentes às pretensões que expressam conhecimento sobre a disciplina. Por exemplo: qual dos problemas abertos pela disciplina demanda uma urgente atenção? O que é para ser considerado uma experiência relevante ou uma argumentação relevante? Qual a técnica mais eficiente para ser usada na resolução de um certo tipo de problema na disciplina? O que seria um *curriculum* universitário apropriado às próximas gerações de cientistas, de profissionais técnicos e educacionais na disciplina considerada? A *imagem do conhecimento* abarca, portanto, as visões cognitivas e as visões normativas científicas relativas à disciplina.

A *imagem do conhecimento*, como exposto por CORRY, mostra-se em harmonia com as idéias gadamerianas que buscam a *consciência da história efeitual*, ao compreender a imagem que brota do conhecimento como efeito e, portanto, compreensão.

Na história atual das disciplinas o *corpo de conhecimento* e a *imagem do conhecimento* aparecem como domínios orgânicos interconectados. O autor propõe uma análise conjugada entre o domínio orgânico interconectado e a separação esquematizada do conhecimento científico nestes dois domínios de discursos. Esta análise não deve ser elaborada de forma artificial, da qual decorreria a cisão entre conteúdo e forma, objeto e método, mas sim deve manter-se atenta às particularidades que interligam o *corpo de conhecimento* e a *imagem do conhecimento*.

Assim, a *imagem do conhecimento* pode prover uma perspectiva bastante útil para a história da ciência em geral, em particular para a História da Matemática. O autor elabora, em seu livro *Modern Algebra and the Rise of*

Mathematical Structures,[94] uma história das estruturas algébricas com o compromisso de compreender a imagem das *estruturas da Álgebra* olhada de dentro do próprio corpo de conhecimento algébrico, que se faz presente na obra dos matemáticos.

A história escrita por CORRY sobre as *estruturas* constitui o fio condutor desta pesquisa, enquanto busca de um filão revelador da construção/produção das *estruturas da Álgebra* tecido na obra matemática humana, que possibilita a investigação do por que a *estrutura da Álgebra* torna-se um acontecimento matemático significativo e por que é considerada uma argumentação relevante para o corpo de conhecimento.

O papel do trabalho de CORRY, nesta fase da pesquisa, é importante pois ele analisa o *corpo do conhecimento matemático* pondo em *epoché* a *imagem estrutural* na temporalidade, constituindo, assim, o movimento da construção/produção das *estruturas*, tornando visível aquilo que foi transmitido do seu conhecimento. E quando a abordagem estrutural é tomada como *imagem*, ela faz parte de algum processo histórico em particular, neste caso, por ser a *estrutura* investigada no âmbito da Matemática ocidental, este processo envolve a Álgebra e a interação entre *corpo* e *imagem de conhecimento* nesta disciplina entre 1860 e 1930, principalmente na Alemanha e, anteriormente, na França.

Em concordância com a proposta da reconstrução retrospectiva *das estruturas da Álgebra*, esta pesquisa não poderá restringir-se àquilo que, em alguns períodos anteriores de desenvolvimento da Matemática, se entendeu por Álgebra e que delineou, no decorrer da história, algum ramo de desenvolvimento algébrico, como por exemplo: o das resoluções de equações por radicais. É preciso que a pesquisa sobre o *Apriori universal histórico das estruturas da Álgebra* estenda-se a diversas regiões matemáticas em que as *estruturas da Álgebra* apresentam-se como mensageiras de uma nova abordagem e que notifiquem a concomitante mudança de imagem.

Há unanimidade entre os historiadores matemáticos pesquisados de que o estabelecimento do conceito de estrutura no âmbito científico matemático ocorre no campo da Álgebra e que o movimento estrutural na Álgebra

[94] CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures, op. cit.*

consolida-se com a publicação do livro *Moderne Algebra* de Dr. Bartel Leendert van der Waerden, em 1930, dada a solidez, consistência e abrangência com que a obra apresenta as *estruturas da Álgebra,* legitimando o seu potencial matemático e explicitando o seu modo carnal de ser, isto é, deixando claro suas características materiais de presença enquanto objeto do campo algébrico.

Na introdução da edição de 1943, encontra-se o objetivo do livro e as indicações sobre quais seriam os domínios algébricos geradores de futuras teorias estruturais: *corpo*, *ideal*, *grupo* e *hipercomplexos*. A seguir a tradução do texto original.

> Introdução
>
> Objetivo do livro. A direção abstrata, formal ou axiomática, à qual a álgebra agradece a sua renovada conjuntura nos tempos atuais, conduziu a uma série de novas formações de conceitos, a conhecimento de novas relações e a amplos resultados, sobretudo na teoria dos corpos, na teoria dos ideais, na teoria dos grupos e na teoria dos hipercomplexos. Introduzir o leitor no todo deste mundo de conceitos deve ser o principal objetivo deste livro.
> Encontram-se, no entanto, conceitos gerais e métodos em primeiro plano, assim os resultados individuais, os quais precisaram ser validados nas condições da Álgebra Clássica, devem também encontrar uma reconsideração condizente com o ambiente da construção moderna.
> Introdução. Instruções para o leitor. Para desenvolver, de forma suficientemente clara, o ponto de vista geral que domina a concepção abstrata da álgebra, era necessário, desde o começo, uma nova apresentação dos fundamentos da teoria dos grupos e da Álgebra elementar.[95]

---

[95]Einleitung
Ziel des Buches. Die "abstrakte", "formale" oder "axiomätiche" Richtung, der die Algebra ihren erneuten Aufschwung in der jüngsten Zeit verdankt, hat vor allem in der Körpertheorie, der Idealtheorie, der Gruppentheorie und der Theorie der hyperkomplexen Zahlen zu einer Reihe von neuartigen Begriffsbildungen, zur Einsicht in neue Zusammenhänge und zu weitreichenden Resultaten geführt. In diese ganze Begriffswelt den Leser einzuführen, soll das Haupt ziel dieses Buches sein.
Stehen demnach allgemeine Begriffe und Methoden im Vordergrund, so sollen doch auch die Einzelresultate, die zum klassischen Bestand der Algebra gerechnet werden müssen, eine gehörige Berücksichtitung im Rahmen des modernen Aufbaus finden.
Einleitung. Anweisungen für die Leser. Um die allgemeinen Gesichtspunkte, welche die "abstrakte" Auffassung der Algebra beherrscht, genügend klar zu entwickeln, war es notwendig, die Grundlagen der Gruppentheorie und der elementaren Algebra von Anfang an neu darzustellen. VAN DER WAERDEN, B. L. *Moderne Algebra*. Erster Teil. Zweite verbesserte Auflage. New York: Frederick Ungar publishing CO., 1943, p. 1.

Como exposto em sua introdução, o objetivo do livro não se restringe a conduzir o leitor no universo das idéias geradoras e geradas nesta nova direção algébrica, mas também tem o propósito de reconsiderar nesta nova conjuntura, resultados já conhecidos e validados na conjuntura da Álgebra Clássica. Visto assim de forma mais ampla, o objetivo a ser alcançado tem a finalidade de suprir a necessidade emergente de compilar e expor sistematicamente os avanços algébricos acumulados, não só aqueles ocorridos por razões internas do *corpo de conhecimento matemático*, mas também aqueles ocorridos pelo estímulo provocado por razões do *corpo de conhecimento* de outras ciências impulsionadas pelas tendências da época, que segundo WUSSING[96] transformaram as ciências, inclusive a Matemática, em uma força produtiva, já apontada no século XIX com a revolução industrial, que reforçava a função social das ciências.

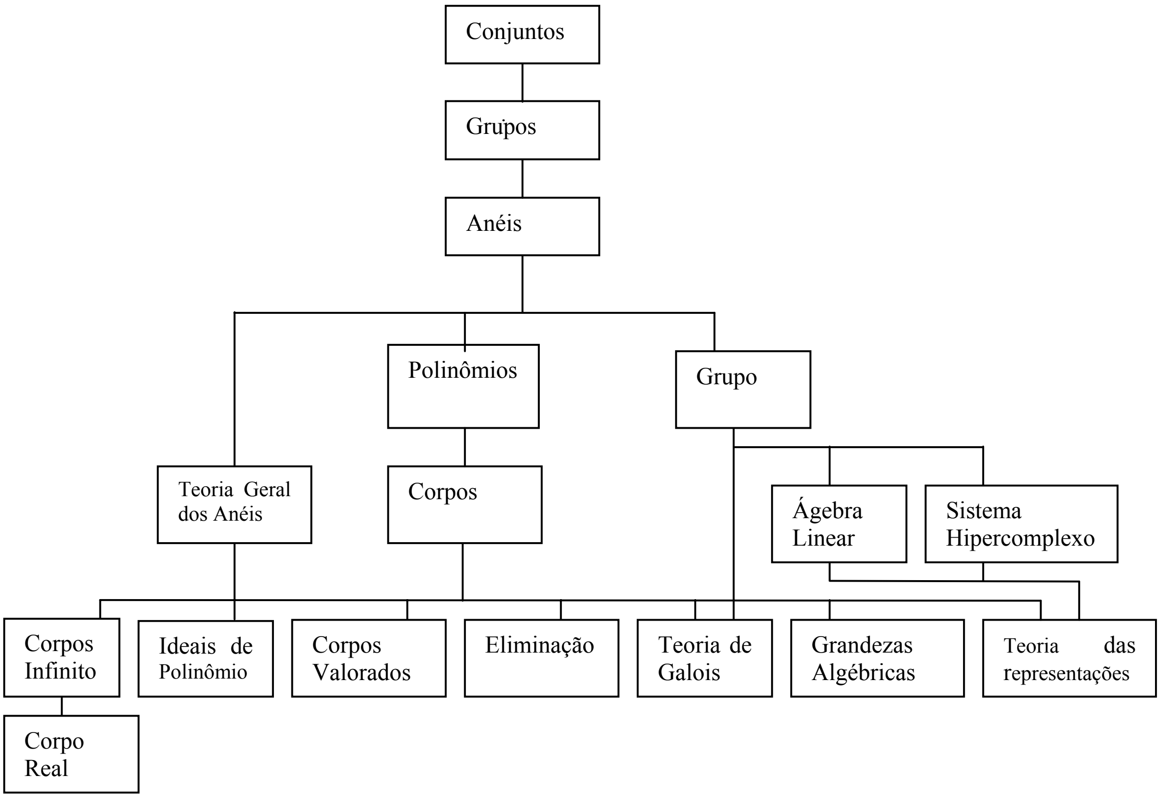
A obra de VAN DER WAERDEN abrange várias áreas do conhecimento algébrico, que são enunciadas no guia de leitura do livro, conforme segue no esquema.

[96] WUSSING, Hans. *Lecciones de Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de Espana Editores, SA 1998, p. 223-236.

Original: anexo 1

Guia

Visão sobre os capítulos dos dois livros e sua dependência lógica



A nova maneira de gerar conceitos, as novas formas de relação e os amplos resultados, são tratados, segundo VAN DER WAERDEN, do ponto de vista geral que domina a concepção abstrata da Álgebra, com o propósito de definir domínios algébricos e de elucidar suas estruturas [11 P1]. Na perspectiva da análise proposta por CORRY entre *corpo do conhecimento* e *imagem de conhecimento*, a obra *Moderne Algebra* é de fundamental importância, porque a imagem estrutural algébrica que dali se extrai abrange os avanços algébricos até então desenvolvidos.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Por ser o objetivo do livro o de definir domínios algébricos e elucidar suas estruturas, serão analisadas algumas definições e articulações de procedimentos para explicitar a nova maneira de gerar conceitos, as formas de relação e os resultados atingidos nesta imagem.

> Original: anexo 2
>
> 6. O conceito de grupo
>
> Definição: Um conjunto não-vazio A de elementos de qualquer tipo (por exemplo de números, de figuras, de transformações) é denominado grupo, se as quatro condições, que se seguem, forem cumpridas:
> 1. É dada uma prescrição de composição, na qual a todo par de elementos a e b de A está agregado um terceiro elemento do mesmo conjunto e que é chamada, na maioria das vezes, por produto de a e b e expressa como ab. (O produto pode ser dependente da seqüência dos fatores: não precisa ser $ab = ba$)
> 2. A lei associativa: Para quaisquer elementos a, b, c de A vale: $ab \,.\, c = a \,.\, bc$.
> 3. Existe (no mínimo) uma (do lado esquerdo) unidade e em A com a característica: $ea = a$ para todo a de A.
> 4. Para todo a de A existe (no mínimo) um (do lado esquerdo) inverso a^{-1} em A, com a característica: $a^{-1}\, a = e$.
> Um grupo chama-se abeliano, quando além disto valer $ab = ba$ (lei comutativa)

Ao definir *grupo* o autor refere-se a um conjunto não-vazio, cujos os elementos são de qualquer tipo. Qualquer tipo, para o autor, quer dizer que os elementos do conjunto são objetos, que podem ser números, sílabas ou combinações deles ou ainda diagramas e transformações. Os objetos são agrupados por característica.

> Uma característica, que todo individual desses objetos têm ou não têm, definem um *conjunto* ou uma c*lasse*; *Elementos do conjunto* são aqueles objetos, aos quais essa característica pertence.[97]

Pode-se, então, entender que o seu ponto de partida tem uma concepção *naive*, ingênua de conjunto e que a expressão *qualquer tipo* denota o fato de que a nova Álgebra pode tratar de coleções de objetos que não sejam necessariamente números e sílabas, mas também de outros objetos matemáticos como diagramas e transformações, desde que seja possível definir uma operação binária no conjunto. A operação suposta na definição é o *produto* e não está definida em termos de uma função matemática.

Assim, na definição de *grupo* está implícita a possibilidade de se operar com qualquer tipo de elementos, desde que eles sejam agrupados por uma característica e possa ser definida no conjunto uma operação qualquer [12 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

É interessante notar que na introdução da definição de *anéis*, VAN DER WAERDEN se utiliza da expressão *Die Grössen* para designar os objetos algébricos, tanto os números inteiros, racionais, reais, complexos, números algébricos, polinômios e funções racionais quanto os demais objetos matemáticos como hipercomplexos, classe de resíduos e outros objetos abarcados pela Álgebra ao abstrair o sentido numérico dos objetos da Álgebra Clássica que levava em conta propriedades próprias dos números, como por exemplo: a continuidade. *Die Grössen*, os atuais objetos algébricos, evidenciam outras formas de operações que não aquelas das operações conhecidas no âmbito dos números, porém similares a elas.

Die Grössen[98] tem sido traduzido como *as quantidades*, *as grandezas*, significado adquirido no século XVII que designava unidade de medida *Gros*, a grosa, doze dúzias. Porém a expressão tem também, em sua raiz, o significado de "*hauptmasse* [*des Heeres*]", em português, *grosso principal*. Pode-se, então, entender que a nova Álgebra trataria daquilo que constitui o *filão principal* dos objetos que, a partir de então, passam a ser designados como algébricos, e que este *filão principal* seria composto de similaridades das operações com esses objetos, as leis operacionais [13 P1]. É evidente que uma nova estratégia articuladora haveria de ser encontrada para copilar, na nova imagem, o conhecimento até então acumulado sobre estes objetos. VAN DER WAERDEN afirma:

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

---

[97] Eine Eigenschaft, die jedes einzelne dieser Objekte hat oder nicht hat, definiert eine Menge oder Klasse; Elemente der menge sind diejenigen Objekt, denen diese Eigenschaft zukommt. VAN DER WAERDEN, B. L. *Moderne Algebra, op. cit.*, p. 3.

[98] DROSDOWSKI, Günther. *Duden Etymologie - Herkunftswörterbuch der deutschen Sprache*. Manheim: Dudenverlag, 1989.

> Por isto é desejável que todos estes âmbitos de “filão principal” sejam postos sob um conceito comum e que as leis operacionais sejam pesquisadas universalmente nestes âmbitos.[99]

A estratégia faz-se presente ao perceber-se que as estruturas de certos sistemas algébricos podem, às vezes, serem examinadas por um conjunto limitado de dados [2 P2]. Esta estratégia é fruto da idéia de que existe algo que pode caracterizar espécies de sistemas algébricos. As experiências matemáticas anteriores já mostravam que a característica pode ser composta de um conjunto de dados e que os dados, o *filão principal*, está relacionado com as operações e relações. Esta forma de articulação perpassa todo o trabalho de VAN DER WAERDEN, porém é certificada pela primeira vez em sua definição de Sistema com Dupla Composição como um conjunto com duas composições: soma e produto, e ao definir *anel* como um sistema, como segue:

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

> Original: anexo 3
>
> 11. Anel
>
> Um sistema com composição dupla chama anel, se as seguintes leis de cálculo forem cumpridas para todo elemento do sistema:
> I. Leis da adição.
> a) Lei associativa: a + (b + c) = (a + b) + c.
> b) Lei comutativa: a + b = b + a
> c) Solubilidade da igualdade a + x = b para todo a e b.
> II. Lei da multiplicação.
> a) Lei associativa: a . bc = ab . c.
> III. Lei distributiva.
> a) a . (b + c) = ab + ac.
> b) (b + c) . a = ba + ca.

VAN DER WAERDEN afirma que, em um *anel*, as leis da adição indicam que os elementos do *anel* formam um grupo abeliano, o grupo aditivo do anel, pois a lei c é dependente da existência do elemento simétrico. Este, por sua vez, depende da existência do elemento neutro, que é único, pois o *grupo* é

[99] “Es ist daher wünschenswert, alle diese Grössenbereiche unter einen gemeinsamen Begriff zu bringen und die Rechengesetze in diesen Bereichen allgemein zu untersuchen.”

abeliano, um resultado obtido do estudo de *grupos abelianos*, que aparece nas páginas anteriores do livro. A articulação posta por VAN DER WAERDEN denota a característica hierárquica de sua forma de organização. Não só por encaixar a estrutura *grupo* na estrutura *anel*, mas também por transmitir economicamente resultados de estudo de uma estrutura algébrica, para dentro da definição de um outra estrutura algébrica constituindo um sistema de afirmações e explorando ao máximo o método axiomático [5 P3].

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Sem dúvida, a afirmação de que uma transmissão econômica de resultados ocorre, não pode ser tomada de modo ingênuo. Ao transmitir-se *economicamente* é preciso responder certas questões que envolvem o *como* e *com que finalidade* os resultados e as leis de um domínio original refletem-se em um novo domínio [6 P3]. São estas questões que norteiam, desde o início do livro, um pesquisar algébrico estrutural que tece uma unicidade teórica e que permite a afirmação de que VAN DER WAERDEN explicitou, de forma coesa, o que é *estrutura da Álgebra*.

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Transmissões econômicas similares à ocorrida entre *grupo* e *anel* dão-se ao definir *corpo* a partir de um *anel*:

> Original: anexo 4
>
> III. Anel e corpo
>
> Corpo. Um anel chama-se corpo torto, quando
> a) ele possui no mínimo um elemento diferente de zero,
> b) as equações $ax = b$ e $ya = b$ para a diferente de zero são sempre solúveis.
> Se o anel, além disto, for comutativo, ele será um corpo ou um domínio de racionalidade (em inglês: field).

que possui, por a) e b), o elemento neutro da multiplicação e, conseqüentemente, o elemento inverso; na demonstração de que um *corpo torto* não possui divisor de zero e ao definir *domínio de integridade* a partir de um *anel comutativo* que só possui o zero como divisor de zero, ou seja, de

---

VAN DER WAERDEN, B. L. *Moderne Algebra, op. cit.*, p. 35.

a.b = 0 tem-se a = 0 ou b = 0. Do *domínio de integridade* definem-se os *ideais* e destes é inspirada uma construção do *sistema dos hipercomplexos*, e, finalmente, constituindo a estrutura *corpo* como aquela que abarca todas as outras estruturas.

Como pode ser constatado, não faz parte da temática da nova Álgebra a característica dos elementos que os define como um conjunto, nem tampouco os processos operacionais, seus algoritmos e seus resultados. Ao definir o domínio algébrico gerado pelos elementos de um conjunto, privilegiam-se leis universais de possíveis operações entre os elementos e a existência de elementos com determinadas características operacionais e suas possíveis dependências [14 P1], por exemplo, o elemento neutro e o elemento simétrico e inversível; a condição da inexistência de divisores de zero; o fato de todo *domínio de integridade* ser *corpo*.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

O domínio assim definido é o domínio de uma estrutura algébrica e sua teorização explicita o sentido desta estrutura, independente de ela ter um preenchimento substancial que evidencie caracterizações específicas no âmbito de um domínio particular daquela estrutura, no qual os resultados das operações poderiam, supostamente, expressar sentidos e adquirir significados, definindo o campo de aplicação [15 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

As *estruturas da Álgebra* exercem o papel principal no novo ato algébrico, pois cada uma delas demarca um campo de comportamento matemático, o seu domínio. O estudo dos domínios possibilita um aprofundamento sintético e analítico no corpo de conhecimento matemático ao focalizar universalmente as leis operacionais. O livro *Moderne Algebra* traz uma explicação do sentido das estruturas no âmbito de seu domínio, de suas possíveis relações com outros domínios estruturais algébricos, da transmissão de resultados de um domínio a outro domínio e suas aplicações em diferentes conjuntos de objetos matemáticos.

Nos três primeiros capítulos do livro é desenvolvida uma base segundo uma organização hierárquica abstrata que revela parte do *velho conhecimento algébrico* na nova imagem algébrica. Nos outros capítulos do livro, coerente a esta nova imagem, são explicitadas soluções de problemas não resolvidos no corpo de conhecimento da Álgebra Clássica e também exposta a pesquisa estrutural algébrica em várias áreas do conhecimento Matemática.

Porém, nem mesmo a grandiosidade e brilhantismo do conteúdo do livro *Moderne Algebra* pode ofuscar a evidência de que o *filão principal* dos domínios que permitiram as articulações matemáticas e o estabelecimento de uma nova imagem da Álgebra já estavam presentes no *corpo do conhecimento* matemático. O *filão principal* dos domínios encontra-se registrado nas aplicações e exemplos do próprio livro, como grupo de transformações ou permutações, anéis de polinômios, hipercomplexos etc. Portanto, seria muito prematuro afirmar, da análise desta obra, que o método axiomático abstrato, aquele usado por VAN DER WAERDEN, teria sido o único responsável pelos novos rumos da Álgebra. É muito difícil contra-argumentar a afirmação de CORRY sobre os motivos internos da mudança ocorrida na Álgebra:

> Esta mudança, entretanto, não foi provocada pela mera adoção da formulação abstrata em álgebra nem pelo crescimento uniforme do corpo de conhecimento. Ao invés disto, ela foi o produto de uma transformação mais profunda e abranjente do objetivo e do método da álgebra.[100]

O matemático historiador E. T. Bell, quando descreve o desenvolvimento estrutural da Matemática que vai do particular e detalhado até o abstrato e geral, aponta para um fato de extrema importância científica e pedagógica porque foca a questão do abstrato de maneira criativa, rigorosa e, além disso, aponta e desmistifica preconceitos sobre o objetivo e o método da Álgebra:

> Ao seguir o desenvolvimento tem-se que evitar especialmente um mal entendido entre outros que poderiam ser produzidos. Os que não são matemáticos de profissão se inclinam às vezes em confundir a generalidade com a variedade e a abstração com a vacuidade. Nas generalizações e abstrações matemáticas que vamos nos ocupar aqui, o oposto é o certo. Cada um em sua especialização adequada e concreta, proporciona casos determinados a partir dos quais se desenvolveu.[101]

[100] This change, however, was not brought about by the mere adoption of the abstract formulation in algebra nor by the steady growth of the body of knowledge. Rather, it was the product of a deeper, overall transformation of the aims and methods of algebra. CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures, op. cit.*, p. 64.

[101] Al seguir este desarrollo hay que guardarse especialmente de um malentendido entre todos los que se podríam produzir. Los que no son matemáticos de profesión se inclinan a

O que está sendo afirmado é que a generalização matemática não pode ser confundida com variedade, e nem tão pouco abstração com esvaziamento. A generalização pode provocar uma certa renúncia de sentidos matemáticos conhecidos enquanto a abstração possibilita a revelação de valores matemáticos que atendem à variedade.

Por exemplo, na generalização matemática na teoria dos números, o conjunto dos números inteiros contém o conjunto dos números naturais, como simples detalhe, pois os naturais são também inteiros. E uma vez que se tenha a teoria dos números inteiros tem-se também a teoria dos números naturais. Além do mais, toda generalização proporciona avanços matemáticos distintos daqueles de onde partiu a generalização. No conjunto dos números inteiros é sempre permitida a operação inversa da adição, a subtração. Por exemplo: 5 - 4 = 1 e 4 - 5 = -1, o mesmo já não acontece no conjunto dos naturais. Isto porque a operação da adição no conjunto dos inteiros passa a ter um outro sentido matemático, com a introdução dos números negativos. A operação da adição dos inteiros possui uma norma, em termos modernos, conhecida como a lei do cancelamento. Há um esvaziamento de sentido da adição como uma ação de juntar que acrescenta, em benefício de outro sentido, a ação de juntar que cancela, mesmo considerando-se que o esvaziamento de sentido só aconteça enquanto o número natural esteja inserido no domínio dos inteiros.

Por outro lado, o sentido da estrutura algébrica em seu domínio, alcançado pela abstração matemática da característica dos elementos que define o conjunto e pela abstração do sentido da operação, refere-se sempre à variedade de coleções portadoras do "filão principal", que permanece sujeita a um preenchimento substancial e que possui determinados comportamentos matemáticos que perduram mesmo quando preenchidas substancialmente, ou seja, quando conhecemos a lei de composição da operação e a característica de seus elementos, aquela que os definem como um conjunto. A característica está aberta à variedade e pode vir

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

---

veces a confundir la generalidad com la variedad, y la abstraccíon com la vacuidad. En las generalizaciones y abstracciones matemáticas de que nos hemos de ocupar aquí lo opuesto es lo certo. Cada uno, en su especializacíon adeguada y concreta, proporciona casos deternimados a partir de los cuales se desarrolló. BELL, E. T. *Historias de las Matemáticas*. Trad. R. Ortiz. México: Fondo de Cultura Económica, 1996, p.198.

a ser determinada, sem interferir no “filão principal”. Nesta perspectiva, a vacuidade da abstração matemática dilui-se evidenciando a variedade. O tratamento estrutural algébrico refere-se, num só golpe, a várias espécies de coleções de objetos algébricos [16 P1].

Quando se considera o estabelecimento das estruturas no contexto do livro *Moderne Algebra*, tem-se em mente o impacto da imagem da Álgebra no âmbito da Matemática ocidental, ao abranger várias áreas com um mesmo tratamento, provocando a tradução do livro em diversos idiomas. A nova imagem é apresentada no livro, plena e incontestável, não no sentido de que ela não precise de aprimoramentos matemáticos algébricos, mas pelas suas coerentes articulações nesta nova imagem, que sem sombra de dúvidas, não podem ser associadas a uma simples publicação ou ao trabalho de um único matemático.

O livro é tomado como uma fonte de pistas, já que o entendimento da imagem da Álgebra que ele propaga desvela referências importantes, tanto aquelas que se orientam para o entendimento das possibilidades abertas pela nova imagem, que são as estruturas matemáticas estudadas no século XX, quanto aquelas que se orientam para o desvelar das imagens que possibilitaram o vislumbre da nova imagem.

Visto de um certo ângulo, o que até aqui foi feito, ao considerar-se o livro *Moderne Algebra*, é uma exploração de um porto historicamente reconhecido - o presente histórico das estruturas da Álgebra - como referência na construção/produção das *estruturas da Álgebra*, onde nossa investigação lança âncora. Parte-se daqui, seguindo pistas deixadas por VAN DER WAERDEN. Ao tematizar-se momentos relevantes da historicidade *das estruturas da Álgebra*, as perguntas que se colocam são: por que o matemático VAN DER WAERDEN pôde fazer o que fez e como o fez? Quais resultados matemáticos poderiam ter-lhe concedido o *insight* inspirador de seu trabalho, aquele que possibilitou as interligações entre ideal, anel, corpo e grupo?

O próprio autor cita matemáticos que influenciaram o seu trabalho em diferentes edições e em vários momentos: na introdução do livro, na introdução dos capítulos ou assuntos. Os matemáticos inspiradores elencados, nesta tese, para esclarecer as perguntas colocadas são: Emmy Noether (1882-

1935)[102], Ernst Steinitz (1871–1928)[103], Richard Dedekind (1811–1916)[104] e Evarist Galois (1811–1832)[105]. O motivo dessa escolha é o de ressaltar a imagem da Álgebra em seus trabalhos, focando o porquê VAN DER WAERDEN pôde realizar sua obra, seguindo a lei fundamental exposta por HUSSERL, que busca reativar as premissas da construção/produção do conhecimento explicitando o *Apriori universal histórico* em direção à *Estrutura Apriori*.

Nos comentários sobre o livro *Moderne Algebra*, afirmou-se que a estratégia de VAN DER WAERDEN é fruto da idéia de que existe algo que pode caracterizar espécies de sistemas algébricos. Porém, o que é que pode garantir a fusão dos domínios de estruturas? O que deu a certeza de que, ao definir-se hierarquicamente os domínios, haveria uma possível transmissão de resultados de um domínio ao outro? CORRY dedica um capítulo de seu livro elucidando a questão.

> /.../ nos artigos decisivos sobre fatoração de anéis abstratos de Noether, todos os elementos relacionados à imagem estrutural aparecem juntos, de forma esclarecedora. Os *insights* inovadores implicados neste artigo sugeriam a ela, aos seus estudantes, colegas, e seguidores, a expectativa de falar de várias disciplinas algébricas a partir de uma perspectiva unificadora, na qual a noção de uma estrutura algébrica está no foco de interesse.[106] [17 P1],[3 P2] e [7 P3]

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

---

[102] VAN DER WAERDEN, B. L. *Moderne Algebra, op. cit.*, p. 2.
[103] *Idem*, *ibidem*, p VI.
[104] *Idem*, *ibidem*, p. 84.
[105] *Idem*, *ibidem*, p. 1.
[106] "/.../ in Noether's decisive articles on factorization in abstract rings, all the elements that inform the strutural image are brought together in an illuminating manner. The innovative insights implied by these articles suggested to her, to her students and colleagues, and to their followers thereafter, the expected gains of addressing the various disciplines of algebra from a unified perspective in which the notion of an algebraic structure lies at the focus of interest." CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures, op. cit.*, p. 222.

Embora a fonte inspiradora dos *insights* matemáticos fosse o artigo de 1921, que trata pela primeira vez da unicidade da fatoração em anéis, a análise retrospectiva do trabalho de Emmy Noether será iniciada em seu artigo *Idealtheorie* de 1926, por evidenciar aspectos fundamentais da nova imagem da álgebra e por encaminhar possíveis respostas às questões colocadas sobre a estratégia de VAN DER WAERDEN.

Este artigo tem o foco de interesse no domínio da estrutura dos *anéis*, traz em seu horizonte de futuro matemático a construção abstrata da atual *Teoria dos Ideais*, declara o início da abordagem estrutural algébrica e descreve a formalização da Álgebra como o estudo de espécies de álgebras em seu nascedouro. Ele é, portanto, um marco importante para a nova imagem da Álgebra pela consistência, abrangência e caráter conclusivo de seu aspecto unificador [18 P1], podendo revigorar trabalhos de antecessores como o de DEDEKIND na *Teoria dos Números Algébricos*, o de HILBERT em invariantes e *Teoria de Números Algébricos*, e o de LASKEER e MACAULAY sobre polinômios.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Neste trabalho, NOETHER parte de um *anel comutativo* R e vai lançando mão de axiomas à medida que surge a necessidade de provar os teoremas de decomposição para atingir a subordinação desejada, aquela que abrangeria tanto o conhecimento de corpos de elementos determinados, ou seja, aqueles dos quais se conhece a característica, quanto o de corpos de elementos indeterminados, aqueles dos quais não se conhece a característica. A idéia central é que desmembramentos como a fatoração em primos no domínio dos naturais, racionais e inteiros, a fatoração de polinômios quaisquer e a fatoração de ideais em corpos de números algébricos, assim como a partição dos inteiros em classes residuais, podem ser tratados de uma mesma forma. NOETHER induz este raciocínio para o âmago do âmbito das estruturas, abstraindo o seu significado numérico, chamando os desmembramentos de decomposição, e mostra que as decomposições assim tratadas independem da operação definida no domínio da estrutura [4 P2].

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Noether 1926, 37: Para a subordinação de corpo numérico e de corpo de função é suficiente o cumprimento dos axiomas de I a

> V e isto aponta para os domínios básicos – números inteiros, polinômios de uma indeterminada, domínio funcional de polinômios de várias indeterminadas.[107]

Segundo CORRY[108], os cinco axiomas são formulados no início do artigo: I. R satisfaz a.c.c. (condição de cadeia ascendente - *ascending chain condition*); II. Toda cadeia propriamente descendente de ideais em R, cada uma delas contendo um ideal não-nulo, é uma cadeia finita; III. Existe um elemento unitário para a multiplicação; IV. Não existe divisores de zero em R e; V. O corpo das frações do anel é integralmente fechado (isto é, cada elemento do corpo das frações, que é um inteiro em relação a R, pertence de fato a R).

Pode-se notar que as condições iniciais do trabalho de NOETHER estão definidas no domínio de estrutura de anéis, cujos elementos são *ideais* que compõem cadeias específicas, prescritas nos axiomas I e II e que os axiomas III, IV e V referem-se às propriedades multiplicativas no *anel*, induzindo uma *Teoria Multiplicativa de Ideais* que tem a fatoração como princípio condutor [19 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

O primeiro teorema a ser considerado por NOETHER é o decorrente do primeiro axioma: Qualquer anel que safisfaça a a.c.c. é decomposto como interseção finita de *ideais irredutíveis*.[109] O próprio enunciado do teorema denota a possibilidade da relação de *anel* e *ideais irredutíveis*, e define a equivalência entre *anel* e *ideal* em termos das propriedades de inclusão, independente de qualquer operação definida no domínio da estrutura. Para exemplificar mais intensamente como se dá a subordinação da decomposição, toma-se aqui o principal teorema de decomposição: VI. Se um anel satisfaz os

---

[107] Noether 1926, 37: "Zur Unterordnung von Zahl – und Funktionenkörpern genügt es somit das Erfülltsein der Axiome I bis V für die Grundbereiche – ganze Zahlen, Polynome einer Unbestimmten, Funktionalbereich der Polynome mehrerer Unbestimmter – nachzuweisen." *Idem*, *ibidem*, p. 243.

[108] I. R satisfies the a.c.c.
II. Every proper descending chain of ideals in R, each of which contains a given non-zero ideal, is a finite chain.
III. There exists a unity for the multiplication in R.
IV. There are no divisors of zero in R.
V. The field of fractions of the ring R is integrally closed (i.e., each element of the field of fractions, which is an integer with respect to R, belongs in fact to R.). *Idem*, *Ibidem*, p. 239.

[109] "Any ring satisfying the a.c.c. is decomposable as a finite intersection of irreducible ideals". *Idem*, *ibidem*, p. 243.

axiomas de I a V, então todo *ideal* do *anel* é representado de modo único como interseção de um número finito de potências de *ideais primos*.[110] Este teorema afirma a representação de *ideais* por *ideais primos* e define a equivalência entre *ideal* e *ideal primo* em termos das propriedades de inclusão. No artigo de NOETHER ficam visíveis as possibilidades de hierarquizar as estruturas pela inclusão e que a transmissão de certos princípios, quer seja na forma de condição inicial, como o caso da a.c.c., quer seja na forma de tratamento, como o caso da idéia de interseção, podem levar à resultados similares em âmbitos diferentes e avanços teóricos [8 P3].

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Dada a possibilidade das definições de estruturas serem hierárquicas, as reflexões sobre as formas de apresentação das teorias que pendiam ora para o genético, ora para o axiomático, voltam-se para o ponto de vista axiomático com a finalidade de redefinição das hierarquias conceituais contribuindo com a estabilidade da nova imagem veiculada pelo método axiomático organizado hierarquicamente pela inclusão.

Embora tenha-se apresentado condições matemáticas que elucidam algumas idéias de como foi possível a fusão de alguns domínios de estruturas, há de se pensar o que teria levado NOETHER a considerar um *anel* de *ideais* e por que estes domínios estruturais aparecem inquestionavelmente de forma abstrata em seu artigo de 1926, como no enunciado do primeiro teorema: "Qualquer anel...."

Nos trabalhos de NOETHER manifesta-se um limite real entre a formalização do domínio numérico e a formalização da Álgebra como sendo a unificação das álgebras não só pela igualdade de certas propriedades de determinados conjuntos, mas em torno de possíveis articulações que correspondessem a várias formas de fatoração [20 P1]. É nesta fase que se encontra o germe da estrutura da álgebra, ou seja, de que uma mesma estrutura poderia ser encontrada em conjuntos de elementos de natureza diferente, com seus próprios modos operacionais, que os domínios

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra– ser humano?*

[110] "VI. If a ring R safisfies axioms I – V, then every ideal in R is uniquely representable as an intersection of a finite number of powers prime ideals". *Idem*, *ibidem*, p. 245.

estruturais mantinham uma relação de inclusão, definidora de uma hierarquia, e, além disso, constatou-se, ainda, a possibilidade de que os teoremas, os axiomas e as proposições de domínios estruturais particulares pudessem ser transferidos para um domínio de estrutura álgébrica. E, para finalizar, que se poderia trabalhar com a idéia de espécie de estrutura [5 P2].

No artigo de 1921, encontram-se vestígios da elaboração inicial da organização hierárquica e, pela primeira vez, a estrutura é tomada em sua forma abstrata dando suporte a uma teoria de representação de álgebras. NOETHER inicia seu artigo afirmando:

> O conteúdo do trabalho aqui apresentado constroi a transferência dos teoremas de decomposição (Zerlegungssätze) de números inteiros racionais, assim como a de ideais em corpo de números algébricos, em ideais em domínios de integridade qualquer e domínios de anéis em geral.[111] [9 P3]

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

A palavra *Satz*, plural *Sätze*, contida na palavra *Zerlegungssätze* traduzida como *teoremas de decomposição*, tem vários significados matemáticos em português. *Sätze* pode ser traduzida como teoremas, proposições e axiomas. Portanto, a afirmação de Noether não precisa ser necessariamente interpretada como uma transferência de resultados que, quando checados nos domínios conhecidos, dão respostas satisfatórias, mas também pode ser interpretado como uma transferência mais ampla que envolve a criação de recursos matemáticos e que assume a mudança da natureza do domínio para o qual a transferência deve realizar-se. Noether percebeu, de alguma forma, que ela não tinha mais a necessidade de referir-se a um domínio de integridade numérico, nem tampouco a um domínio de integridade numérico qualquer. Ela refere-se a um domínio de integridade qualquer, como também não se refere à anéis de alguma coisa, como anéis de polinômios, refere-se a anéis em geral [6 P2]. É exatamente neste

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

[111] "Noether 1921, 25: "Den Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet die Übertragung der Zerlegungssätze der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörper, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemainer Ringbereichen." *Idem*, *ibidem*, p. 228.

ponto que o domínio passa a ser efetivamente domínio de estrutura e que se estabelece o nuclear das relações das espécies de estruturas [21 P1]. A Álgebra revela-se como algo novo e não como um crescimento natural, uniforme, contínuo e seqüencial do corpo de conhecimento da Álgebra Clássica, como se fosse uma mera resultante. É evidente que o salto *qualitativo* dado por NOETHER tem, como pano de fundo, o trabalho de grandes matemáticos, contemporâneos e predecessores, porém "NOETHER não combinou simplesmente as realizações de seus predecessores; ela adianta-se com um trabalho matemático que era essencialmente diferente do deles."[112] [10 P3].

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Para realizar a transferência dos teoremas de decomposição, primeiramente ela reconsidera a fatoração dos inteiros em primos sob uma nova perspectiva. Tomou a decomposição de números inteiros racionais da seguinte forma: dado um número inteiro, ele pode ser decomposto em fatores, que são produto de potências de primos. Exemplo: $126 = 2 \times 9 \times 7 = 2 \times 3^{2} \times 7$ onde $q_1 = 2$, $q_2 = 9$; $q_3 = 7$ ou $126 = 2 \times (-3)^2 \times 7$; $q_1 = 2$, $q_2 = 9$; $q_3 = 7$. NOETHER estuda as propriedades das decomposições de inteiros e define a irredutibilidade dos componentes de uma decomposição em termos destas propriedades, de tal forma que para cada fator q_i existe um único p_i e um número natural n, tal que $p_i^n = q_i$. Exemplo de uma decomposição não irredutível seria: $126 = 2 \times 3 \times 21$, pois a componente 21 ainda pode ser decomposta e não pode ser escrita como uma potência de um primo. Assim, o teorema da fatoração única dos números inteiros em função dos componentes primários irredutíveis, q_i, é fundamentado no seguinte resultado:

> Noether 1921, 25: Em duas diferentes decomposições de um número inteiro racional em componentes primárias maiores e irredutíveis q, coincidem o número de componentes, o correspondente número primo (exceto o sinal) e os expoentes.[113]

[112] "Noether did not simply combine the achievements of her predecessores; she came forward with a mathematical work which was essentially different from theirs." *Idem*, *ibidem*, p. 251.

[113] "Noether 1921, 25: "Bei zwei verschiedenen Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in die irreduziblen, größten primären Komponenten q stimmen die Anzahl der

Desse modo foi construído para números primos inteiros um caminho semelhante àquele construído tanto para os ideais de polinômios que podem ser decompostos em componentes primários, quanto para o caso de um ideal primo estar associado a cada componente primário, a fim de estender o teorema da fatoração única para anéis em geral, unificando as álgebras em torno da idéia de decomposição [7 P2].

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Ao definir um anel, NOETHER cita o trabalho de Abraham Fraenkel (1891-1965) sobre *números p-ádicos* que discutia sistematicamente as propriedades básicas destas entidades numéricas como sistema axiomático. FRAENKEL também formulou claramente as relações entre grupo e anéis, e mostrou que se um anel não possui divisores de zero, ele é corpo. Com isso foi possível transladar todos os conceitos da *Teoria Algébrica dos Corpos*, desenvolvidos por Ernst Steinitz (1871–1928), para a *Teoria dos Anéis*. Uma vez que as articulações entre *grupo* e *anéis*, *anéis* e *corpo*, *grupo* e *corpo* estavam estabelecidas, faltava construir a articulação entre *anéis e ideais* para completar a cadeia das estruturas.

NOETHER, em sua definição de anel faz uso de axiomas abstratos e gerais. Seu trabalho é focado nos *anéis comutativos*, nos quais todo *ideal* tem uma base finita (*Endlichkeitbedinung* – condição de finitude), e prova a equivalência[114] entre a condição de finitude e a condição de cadeia ascendente (a.c.c.), declarando que a última condição tem sido abordada de forma bastante reduzida tanto por DEDEKIND quanto por Emanuel Lasker (1868–1941), que também desenvolveu trabalhos sobre a *Teoria dos Ideais*. NOETHER lida com a condição a.c.c. de forma abstrata, não se referindo mais a um conjunto numérico, mas a um conjunto qualquer [11 P3].

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Komponenten, die zugehörigen Primzahlen (bis auf das Vorzeichen) und die Exponenten überein." *Idem*, *ibidem*, p. 229.

[114] Detalhes em *Idem*, *ibidem*, p. 229.

STRUIK[115] afirma que muito do que se fez na Álgebra estaria ligado ao nome de Ernst Zermelo, e seu famoso teorema da boa ordenação de 1902. Este teorema afirma que, em qualquer conjunto, uma relação a < b ("a precede b") pode ser introduzida de tal forma que para quaisquer dois elementos a e b, tem-se a = b, ou a < b ou a > b, e que, dados três elementos, a, b e c, se a < b e b < c, então a < c, e que todo subconjunto não-vazio possui elemento mínimo, o que caracteriza a generalização da idéia de máximo e mínimo da condição de cadeias ascendentes ou descendentes. Conseqüentemente, os resultados da Álgebra Estrutural estariam ligados também ao *axioma da escolha*, que afirma que de cada subconjunto de um dado conjunto, pode-se extrair um elemento que o represente.

NOETHER, inspirada nas idéias da *Teoria dos Ideais* de DEDEKIND, desenvolve condições tais que um *ideal* seja um módulo composto por todos os elementos de um *subanel* e que a extensão do *subanel*, contida no *anel*, seja uma ordem. As idéias da boa ordenação, do elemento mínimo em termos de uma ordem definida pelas propriedades de inclusão implícitas na relação *anel* e *subanel*, justificam matematicamente a extensão do teorema da fatoração única do domínio numérico para o domínio de estrutura de *anéis*, apoiada num estudo rigoroso dos conceitos de irredutível, de primo e de *ideais primários* que, sem dúvida, são reflexos de outros trabalhos que abordavam questões da decomposição única de um polinômio em fatores irredutíveis de um x indeterminado, para o caso de n variáveis que é formulado em termos de mínimo múltiplo comum de ideais no domínio de estruturas numéricas. Esta é a trama tecida por NOETHER para dar o salto qualitativo que vai ao encontro de um novo entendimento de estruturas, aquele relativo às *estruturas da Álgebra*.

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Tanto a idéia da comparação de estruturas algébricas diferentes a fim de estabelecer uma *ordem* entre elas, quanto a tendência de apresentar os conceitos e as definições por axiomas que caracterizam a imagem da Álgebra no trabalho de NOETHER, despontam do domínio de estruturas numéricas, exemplificados em seu próprio trabalho na redefinição de

---

[115] STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Trad. João Cosme Santos

irredutibilidade dos inteiros, na forma de extensão do teorema da fatoração, mas também no trabalho de DEDEKIND e na Análise Postulacional decorrente do trabalho de HILBERT ao desenvolver uma nova axiomatização da Geometria e da Aritmética [12 P3], [8 P2].

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Porém, a imagem destes trabalhos inspiradores difere da imagem daqueles que desenvolvem uma teoria de uma determinada estrutura, como da *Teoria dos Anéis* e *Teoria dos Corpos*, pois as condições das propriedades a que se referem são determinadas por entidades substancializadas, ou seja, as propriedades surgem em domínios matemáticos particulares: domínio numérico ou não-numérico, como o caso das permutações, das transformações e dos objetos geométricos, sem ter a intenção de agrupá-los em suas características básicas.

Para exemplificar o processo de estabelecimento de uma teoria de uma estrutura, será analisada a imagem da Álgebra no trabalho intitulado A *Teoria Algébrica dos Corpos* - *Algebrische Theorie der Körper* - desenvolvido por STEINITZ em 1910, porque ele é considerado um trabalho pioneiro na investigação estrutural algébrica, conhecido como o *berço da Álgebra Moderna*. STEINITZ afirma no início de seu trabalho: "O objetivo deste trabalho é obter uma visão geral de todos os possíveis tipos de corpos e identificar suas relações entre si em suas características básicas."[116] [22 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Apesar de seu trabalho ter como pano de fundo a Aritmética e como objeto de estudo corpos numéricos, o autor justifica o título de sua obra *Teoria Algébrica dos Corpos*, por fazer uso de um tratamento que não processa as diferenças entre as grandezas (Grössen) inteiras e fracinárias. Sua estratégia, para obter a concentração de todos os tipos, consistia em considerar o corpo mais simples possível de cada tipo, e então desenvolver métodos

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1997, p. 319.

[116] "Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen, kann als Programm dieser Arbeit gelten." CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, *op. cit.*, p. 195.

para que deste corpo se obtivesse um novo corpo, por extensão. O instrumento central de seu estudo era a *característica* do corpo [9 P2], [13 P3]. De acordo com a descrição de STEINITZ sobre o desenvolvimento de sua teoria apresentada na introdução de seu livro:

> A primeira tarefa diz respeito ao conceito de corpo primo e a uma diferenciação dos corpos segundo a característica. Em todo corpo está contido um corpo mínimo ou corpo primo; o mesmo é ou do tipo dos números racionais (característica 0), ou do tipo do sistema de classe de restos de um número primo *p* (característica *p*). [117] [10 P2]

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra– ser humano?*

O trabalho de STEINITZ parte do conceito de *corpo* que contempla a definição de domínio racional de KRONECKER e a definição de corpo de DEDEKIND. Esse conceito é composto de sete regras: a lei associativa e comutativa da adição e da multiplicação; a lei distributiva; a lei da subtração infinita e única e a lei da divisão infinita e única. Segundo essas leis o sistema dos números racionais seria ele próprio um *corpo mínimo* ou *corpo primo*. Pelo estudo das propriedades dos *corpos primos*, Steinitz classifica as possíveis extensões de um corpo, em *extensões algébricas* e as algébricas denominadas *extensões transcendentes*.

> Às extensões algébricas pertencem as finitas, aquelas que são caracterizadas pelo seguinte: todos os elementos lineares e homogênios com coeficientes do corpo de base podem ser apresentados por um número finito de elementos do corpo de extensão. [118]

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

O autor analisa quais propriedades podem ser transmitidas de *corpo* para suas possíveis extensões,

[117] Die erste Aufgabe führt auf den Begriff des Primkörpers und eine Unterscheidung der Körper nach der Charakteristik. In jedem Körper ist ein kleinster Körper oder Primkörper enthalten; derselbe ist entweder vom typus des Körpers der rational Zahlen (Charakteristik 0), oder vom typus des Restklassensystems einer Primzahlen *p* (Charakteristik *p*). STEINITZ, Ernst. *Algebraische Theorie der Körper*. New York: Chelsea Publishing Company, 1950, p. 5.

[118] Zu den algebraischen Erweiterung gehören die endlichen, welchen dadurch charakterisiert sind, dass durch eine endliche Anzahl von Elementos des Erweiterungskörpers alle Elemente linear und homogen mit Koeffizienten aus dem GrundKörper dargestellt werden Können. *Idem*, *ibdem*, p. 6.

as quais podem ser obtidas por sucessivas adjunções algébricas [14 P3], inspirado no desenvolvimento das idéias de GALOIS (1811–1838). STEINITZ define *corpo algebricamente fechado,* como sendo a extensão *E* de um corpo *K* que contém as decomposições em fatores lineares de todas as funções de K. O autor avança sua pesquisa em termos do conjunto de funções de um corpo e pôde provar que existe uma única extensão do *corpo* que é suficientemente grande para decompor todas as funções desse *corpo*, este é o teorema fundamental [23 P1]. Prova ainda que a extensão pode ser feita de uma única maneira.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Como conseqüência do teorema fundamental tem-se que todas as funções do *corpo* dos complexos são redutíveis, ou seja podem ser decompostas em fatores lineares no *corpo* dos complexos. Portanto, ele é *corpo* de extensão *maximal* de característica 0 [11 P2].

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

No final da introdução do livro, STEINITZ anuncia uma continuidade de sua pesquisa e da sua aplicação em outra áreas da Matemática como *Geometria*, *Teoria dos Números* e *Teoria das Funções*. Segundo nota dos organizadores do livro, essa pesquisa não foi nunca encontrada.

É importante ressaltar que, embora o estudo da *Teoria dos Grupos* tenha sido bastante desenvolvido na *Teoria dos Números*, na *Teoria das Permutações* e na *Teoria das Transformações*, é com a *Teoria Algébrica dos Corpos*, que o programa estrutural se evidencia como uma pesquisa de uma entidade matemática do tipo estrutural.

STEINITZ, ao construir a *Teoria Algébrica dos Corpos*, desenvolveu uma teoria ampla que justificava um conceito de número com uma caracterização mais abstrata, definitiva e universalmente válida que abrangia todos os conjuntos numéricos, naturais, racionais, inteiros, reais e complexos. Segundo WUSSING[119] este trabalho apresenta o fim da axiomatização da Álgebra Clássica e é o ponto de partida para o trabalho de NOETHER e outros matemáticos [24 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Ser ponto de partida é o que caracteriza a genialidade de seu trabalho, pois ele sugere que não é necessário partir de vários sistemas de números com

[119] In: WUSSING, H. *Die Genesis des Abstrakten Gruppen Begriffes*, *op. cit.*, p. 187.

suas propriedades para assegurar uma fundamentação da Álgebra, mas sim tomar as características estruturais comuns dos corpos, fazendo surgir uma nova abordagem de pesquisa, aquela que evidenciava o método axiomático ao expressar uma estrutura e seu estudo [12 P2], isto porque ele se apoiou na construção axiomática do sistema numérico de 1900 de David Hilbert (1862 – 1943).

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Embora a abordagem axiomática, em si, não fosse nenhuma novidade no ano de 1899 para a comunidade de matemáticos, o trabalho de HILBERT, intitulado *Grundlagen der Geometrie*, teve um profundo impacto. Nele, era apresentado um conjunto de axiomas pensados para expressar a "nossa intuição de espaço" organizado em três sistemas de objetos indefinidos: ponto, linha e plano, para que, a partir deles, todo o conhecimento geométrico, tanto da geometria euclidiana quanto da não-euclidiana, pudesse ser deduzido. HILBERT mostrou que era possível construir este todo do conhecimento geométrico dependendo do grupo de axiomas que fossem admitidos. Inspirado no trabalho de outros matemáticos como PEANO e PIERI, ele iniciou uma discussão sobre a completude de um sistema e, mais tarde, estabeleceu uma relativa consistência da usual Geometria Cartesiana quando o corpo todo dos números reais é usado no modelo. Seu trabalho axiomático é intensamente discutido em conexão com a Lógica através do movimento da *Análise Postulacional*. Este movimento se estende à análise de definições abstratas de *grupo* no campo numérico, principalmente, por Edward Huntington.

Em 1900, HILBERT discute em seu artigo *Über den Zahlbegriff – Sobre o Conceito de Número*, dois diferentes modos de lidar com conceitos matemáticos: a abordagem genética e a abordagem axiomática. Para explicitar a abordagem genética traz um exemplo clássico: as extensões numéricas, partindo dos números naturais que nascem na intuição da contagem, que passam pela definição de subtração, que precisa ser estendida aos inteiros, pela definição da divisão, que é estendida aos racionais e, finalmente, aos reais pensados como cortes dos racionais, enquanto o método axiomático era exemplificado pela Geometria. Afirma, ainda, que embora o método genético tenha um altíssimo valor pedagógico, o método axiomático tem a vantagem de prover uma exposição conclusiva, assim como também prover uma confiança lógica para os conteúdos do conhecimento. Neste artigo ele apresenta, ainda, axiomas aritméticos avançando o seu método axiomático para o campo numérico.

O ponto central do trabalho de HILBERT é a questão dos sistemas de axiomas que focaliza os fatos em forma de axiomas junto à discussão da completude do sistema. É interessante notar como o método axiomático surge desvinculado das questões estruturais, embora ele cumpra um papel importante na construção da nova imagem da Álgebra, pois ele é um instrumento que permite uma mudança segura e coerente na finalidade do estudo das propriedades de um conjunto de objetos matemáticos que provoca uma inversão [13 P2]: por seu intermédio, entende-se que as propriedades podem ser axiomas quando tomadas como um fato que ocorre em um conjunto, e que, quando articuladas em um sistema lógico, podem expressar o conjunto no qual se originaram [25 P1]. A checagem da coerência da inversão, no contexto matemático dá-se de forma natural, pois a inversão ocorre em domínios matemáticos conhecidos. As propriedades tomadas como axiomas, quando recolocadas em seu "hábitat" natural, não só se encaixam como também são coerentes a todas as relações próprias deste domínio [26 P1]. Tanto é assim que as disciplinas de Álgebra e Geometria permaneciam desassociadas no trabalho de HILBERT, o olhar algébrico estrutural ainda não se havia consolidado. É o trabalho de STEINITZ que sugere uma nova conotação para a inversão proposta por HILBERT no campo numérico, a de que as características das estruturas definissem o domínio estrutural, que é reiterada no trabalho de NOETHER, com a adoção do método axiomático [27 P1].

> Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Segundo CORRY, STEINITZ tinha como pano de fundo outros resultados bastante relevantes, como os de Heinrich Weber (1842–1913), que apresentava o conceito de *grupo* em termos abstratos e definia *corpo* como *grupo* com dupla composição [28 P1]. Ele também já havia realizado, anteriormente, uma

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

análise abstrata comum estendida a duas estruturas, os grupos finitos e os grupos infinitos, ao discutir as propriedades dos grupos de permutação que tinham sua origem nas idéias de GALOIS; assim como os resultados do trabalho de Kurt Hensel (1861–1941) sobre os *corpos* p-ádicos, nos quais ele já havia constatado que qualquer inteiro ordinário pode ser expresso em um e somente um modo como soma de potências de um primo. Exemplo: $216 = 2.3^3 + 2.3^4$, que mais tarde se estende para os racionais e, finalmente, é por ele generalizado e apresentado como p-ádico número da forma: $\sum_{i=-n}^{\infty} c_i p^i$, onde p é um número primo e c_i são números racionais com denominadores não divisíveis por p. Ele mostrou ainda que estes números têm uma estrutura de corpo. HENSEL recebeu influência dos trabalhos de LIPSCHITZ, WEIERSTRASS e KRONECKER, como também foi um estudioso de DEDEKIND.

Antes do trabalho de STEINITZ, as estruturas eram instrumentos para estudar as propriedades de um domínio de objetos matemáticos específicos e conhecidos [29 P1]. Esta é uma das principais características que denotam o surgimento das estruturas em Álgebra. Uma das mais importantes fontes inspiradoras que propiciou o desenvolvimento das idéias estruturais foi a dos trabalhos de DEDEKIND. Ele trabalhava individualmente e não tinha a mesma facilidade de sua seguidora, NOETHER, para formar grupos de pesquisadores ao seu redor e ver seus pensamentos serem desenvolvidos.

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Embora a imagem da Álgebra de DEDEKIND fosse menos abrangente do que a de STEINITZ, a de NOETHER e a de VAN DER WAERDEN, ela trazia uma certa nuança de aprofundamento próprio da abordagem estrutural revelada nos conceitos por ele desenvolvidos. Sua Álgebra era rica em criatividade, rigor matemático e na exploração de caminhos originais. Continha modos genuínos de organização, definição e utilização de conceitos e princípios, revelando uma abordagem idiossincrática no ambiente matemático da sua época [15 P3]. Os conceitos fundamentais como: *grupo*, *corpo*, *ideal*, *reticulados* e *módulo* eram indícios

> Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

de tipos de estruturas, apresentavam-se como noções estruturais [30 P1].

A leitura sobre os motivos primeiros que levam DEDEKIND a debruçar-se sobre questões referentes ao cálculo diferencial é extremamente importante para que se possa constituir a sua imagem da Álgebra, que é um marco na fundamentação da Análise. DEDEKIND declara, em 1872, em seu trabalho intitulado *Continuidade e Números Irracionais - Stetikeit und irracionale Zahlen*:

> Achava-me então [1858, N.A] [...] pela primeira vez na situação de ter que expor o cálculo diferencial e sentia naquele momento mais claramente do que nunca a ausência de uma fundamentação científica real da aritmética [...] este sentimento de insatisfação era então tão poderoso em mim que decidi refletir sobre isto tanto tempo quanto fosse preciso, até encontrar uma fundamentação puramente aritmética e completamente rigorosa dos princípios da análise infinitessimal. [...] A introdução usual dos números irracionais se apóia precisamente no conceito de magnitude extensiva - que ainda não foi rigorosamente definido em parte alguma - explica o número como o resultado de medir uma de tais quantidades por meio de uma segunda do mesmo tipo. Em lugar disto pretendo que a aritmética se desenvolva a partir de si mesma. Em geral pode ser admitido que tais referências a idéias não Aritméticas foram motivo da ampliação do conceito de número; mas esta não é uma razão válida para aceitar na ciência dos números essas considerações estranhas a própria Aritmética. Assim como os números racionais negativos e fracionários devem e podem ser produzidos através de uma livre criação, e as leis das operações com esses números podem reduzir-se às leis das operações com números inteiros positivos, do mesmo modo tem-se que aspirar que também os números irracionais podem ser definidos completamente e somente a partir dos números racionais [L11.11,pp.9-10]. [120] [14 P2], [16P3], [15P2]

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

[120] Me hallaba por entoces [1858, N.A] [...] por primeira vez en la situación de tener que exponer el cálculo diferencial y sentía ahora más claramente que nunca la ausencia de una fundamentación científica real de la aritmética [...] Este sentimiento de insatisfacción era entonces tan poderoso en mí que decidí resueltamente reflexionar sobre ello tanto tiempo como necessitara hasta encontrar una fundamentación puramente aritmética y completamente rigurosa de los principios del análisis infinitesimal. [...] La introducción habitual hasta ahora de los números irracionales se apoya precisamente en el concepto de magnitud extensiva – que no há sido definido rigurosamente en ninguna parte – y explica

O princípio que induzia as extensões referidas por DEDEKIND era aquele do programa euclidiano calçado no *Princípio da Permanência* que afirmava, por exemplo, que, como 2 x 3 = 3 x 2 , tem-se a comutativa também válida para a raiz quadrada de dois vezes a raiz quadrada de 3 e, mais ousadamente, também para multiplicação de números complexos. Segundo BELL,[121] a necessidade de demonstrar as afirmações decorrentes deste princípio é que levam DEDEKIND a criar o seu sistema de números reais, que acrescido de outros trabalhos culmina com o desenvolvimento da análise. Assim, a idéia central de DEDEKIND era o estudo da continuidade, aquela que nunca tinha sido esclarecida em termos aritméticos.

DEDEKIND parte da seguinte constatação: dado um número racional *a*, consideremos A_1 a classe de todos os racionais menores do que *a* e A_2 a classe de todos os racionais maiores do que *a*. Tomemos *a* de tal forma que ele pertença a A_1 ou a A_2, portanto ou *a* é o maior número de A_1, ou *a* é o menor número de A_2. Pode-se então afirmar que:

1 - A_1 a A_2 são disjuntos.

2 - Todo número racional pertence a A_1 ou A_2.

3 - Todo número de A_1 é menor do qualquer número de A_2.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Duas classes que satisfaçam as três citadas propriedades são denominadas *cortes*. Assim, DEDEKIND introduziu a sua mais importante inovação conceitual, ou seja, as propriedades são utilizadas como instrumento para definir uma determinada circunstância numérica [31 P1]. DEDEKIND mostra que qualquer racional define um *corte* mas que nem todo *corte* é definido por um racional, o que significa uma certa descontinuidade nos números racionais e que um

el número como el resultado de medir una de tales cantidades por medio de una segunda del mismo tipo. Em lugar de esto pretendo que la aritmética se desarrole a partir de sí misma. En general puede ser admitido que tales referencias a ideas no aritméticas han sido motivo de la ampliación del concepto de número; pero no por ello existe ninguna razón válida para aceptar en la ciencia de los números estas consideraciones extranas a la propria aritmética. Así como los números racionales negativos y fraccionarios deben y pueden ser producidos mediante una livre creación, y las leyes de las operaciones con estos números pueden reducirse a las leyes de las operaciones con números enteros positivos, del mismo modo se tiene que aspirar a que también los números irracionales pueden ser definidos completamente y sólo a partir de los números racionales [L 11.11, pp. 9-10]. WUSSING, H . *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. *Op. cit.*, p. 211.

[121] Ver detalhes em BELL, E. T. *Historia de las Matemáticas*, *op. cit.*, p. 191.

sistema contínuo é a coleção de todos os *cortes* como a linha reta. Define os números reais como sendo a coleção de todos os cortes de racionais e demonstra todas as propriedades deste novo sistema exclusivamente usando a relação de inclusão. Discute as propriedades de ordem e mostra que o sistema dos números reais é um sistema totalmente ordenado e que ele forma um contínuo. Finalmente ele define todas as operações de números reais e prova suas propriedades. Este estudo dos números reais fundamenta as operações tais como $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Na afirmação de CORRY:

> Aqui, a inovação de Dedekind era, como em outros exemplos importantes, ter tomado a propriedade já conhecida e transformá-la em uma definição: um sistema infinito é aquele que contém um subsistema equipotente próprio.[122] [16 P2], [17 P3]

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Mas a inspiração do matemático DEDEKIND não cessa aí. Entre 1871 e 1894, ele publica várias versões de sua *Teoria dos Ideais*, que tem suas raízes na *Teoria dos Inteiros Complexos*.

Por volta de 1844, KUMMER cria uma *Teoria dos Números Ideais* ao realizar estudos sobre a possibilidade da fatoração única dos inteiros complexos. Ele desenvolveu uma argumentação em torno de raiz da unidade em conexão com a *Teoria das Formas Quadráticas* de GAUSS, buscando estabilizar a fatoração única. DEDEKIND tinha conhecimento deste trabalho, porém toma uma outra direção. Segundo KLINE[123], ele faz uma generalização das teorias de KUMMER e de GAUSS.

<u>DEDEKIND define *número algébrico de grau n* como sendo as raízes de uma equação de grau n, cujos coeficientes são inteiros (positivos e negativos)</u> [32 P1]. As raízes de uma

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

---

[122] "Dedekind's innovation here was, as in other important instances, to have taken this already known property and transform it into a definition: An infinite system is one, that contains a proper, equipotent subsystem." CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, *op. cit.*, p. 75.

[123] Ver detalhes em: KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972, p. 823 - 826.

equação serão chamadas de *inteiros algébricos de grau n,* se o coeficiente da incógnita, cuja a potência é de maior grau, for 1. Como conseqüência dessa definição temos que um *inteiro algébrico* pode conter frações ordinárias, desde que ele seja uma raiz de uma equação do tipo $x_n+a_1x^{n-1}+.....+a_n = 0$.

Em seguida, ele introduz o conceito de corpo como sendo uma coleção de números reais ou complexos em que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (sem divisor de zero) são satisfeitas. Prova, ainda, que o conjunto de todos os números algébricos formam um corpo [33 P1]. Mais tarde, introduz o conceito de *anel* como sendo qualquer coleção de números no qual as operações de adição, subtração e multiplicação são definidas. Mostra que o conjunto de todos os *inteiros algébricos* forma um *anel* assim como o conjunto de todos os *inteiros algébricos* de qualquer *corpo* de número algébrico específico.

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Com base nesses conceitos, DEDEKIND mostra que os *números algébricos* não possuem incondicionalmente a propriedade de unicidade de fatoração. Consideremos o domínio dos números da forma $a+b\sqrt{-5}$ onde a e b são inteiros.

$$21 = 3 \cdot 7 = \left(4+\sqrt{-5}\right)\cdot\left(4-\sqrt{-5}\right) = \left(1+2\sqrt{-5}\right)\cdot\left(1-2\sqrt{-5}\right).$$

A busca de algo que pudesse ter um papel na fatoração do corpo dos reais e complexos análogo ao papel do número natural primo na fatoração dos números naturais leva DEDEKIND a criar os *ideais*, não mais como número ideal, mas como classe de *números algébricos* [18 P3] que, em honra a KUMMER, chamou de *número ideal*.

> Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

No exemplo acima: 21 = 3.7, não mais se fala do número 3, mas sim de todo número divisível por 3, 3m onde m é um inteiro, assim como também não mais falamos de 7, mas sim de todos os números divisíveis por 7, 7n onde n é inteiro. Do mesmo modo não falamos mais de 21 e sim de 21p. A classe 3m "vezes" a classe 7n é igual à classe 21p. A classe 3m é um fator da classe

21p. KLINE[124] afirma que, para seguir o trabalho de DEDEKIND, é preciso acostumar-se a pensar em termos de classe de números. Ao dizer número ideal, ele se refere a uma classe de números que será denotada pela palavra *ideal*. Com o desenvolvimento da *Teoria dos Ideais*, criam-se tanto condições para a definição de inteiro generalizado, quanto uma estabilidade na questão da fatoração única dos inteiros. Porém, a generalização dos inteiros provoca mudanças profundas nos conceitos fundamentais da Aritmética Clássica como no conceito de divisibilidade aritmética frente a divisibilidade algébrica.

> Primeiro, aquilo que se refere as unidade. Sem especificar-se o que é um "inteiro", uma unidade de uma série dada de inteiros é um que divide a todos os demais. Um inteiro *a* "divide" a um inteiro *b*, se há um *j* tal que *j* = *ab*.
> Segundo, ao que se refere aos "irredutíveis". Se diz que um inteiro *a* é irredutível se "*a* = *bj*" com *b*, *j* inteiros pressupõe-se que *b* ou *j* é a unidade e o outro é *a*.
> Terceiro, aquilo que se refere aos números primos. Se diz que um inteiro *a* é primo se é irredutível, e se além disto a afirmação de que "*a* divide a *bj*" pressupõe pelo menos a uma das seguintes afirmações: "*a* divide *b*" ou "*b* divide *a*". [125]

Estas afirmações estão de acordo com as dadas para os inteiros racionais, mas, enquanto os números primos racionais coincidem com os irredutíveis, o mesmo não acontece com todos os inteiros generalizados.

As idéias contidas no que foi exposto sobre ideais são lapidadas com o passar do tempo pelo próprio DEDEKIND, aprofundando os conceitos de ordem, de reticulados, estabelecendo possíveis relações. Porém, é importante ressaltar que, <u>para ele, a *Teoria dos Ideais* foi sempre um instrumento para compreender as propriedades da fatoração em casos mais gerais de *números algébricos* como um fim em si. Para ele, o conteúdo objetivo da Álgebra avançada era o sistema dos números</u>

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

---

[124] *Idem*, *ibidem*, p. 823.

[125] Primeiro, lo relativo a las unidades. Sin haber especificado todavía lo que es un "entero", una unidade de una serie dada de enteros es uno que divida a todos los demás. Un entero ***a*** "divide" a un entero ***b***, si hay un entero ***j*** tal que ***j = ab***.
Segundo, lo relativo a los "irreducibles". Se dice que un entero a es "irreducibles" si "a = bj" com *b*, *j* enteros, presupone que o *b* o bien *j* es una unidade e el outro es *a*.
Terceiro, lo relativo a los números primos. Se dice que un entero *a* es primo si es irreducible, y si adémas la afirmación de que "*a* divide a *bj*" presupone por lo menos una de las dos afirmaciones siguintes: "*a* divide a *b* ", o "*a* divide a *j*". BELL, E. T. *Historia de las Matemáticas*, *op. cit.*, p. 231.

complexos e a inter-relação com o domínio dos racionais [34 P1]. Embora tenha avançado seus estudos abrangendo outros domínios que não a *Teoria dos Números*, considerando-os de forma genuína como cita WUSSING: " Dedekind se referia, pela primeira vez em 1857, aos elementos de Galois não como substituição, mas sim como automorfismo de corpos."[126]

A forma genuína é ainda evidenciada em seu trabalho publicado em 1894 *Zur Theorie der Ideale*[127] - *Sobre a Teoria dos Ideais*, no qual expõe a pesquisa sobre a relação entre ideais em diferentes corpos iniciada pela definição de ideal em corpo normal, em que o grupo de GALOIS é apresentado como um exemplo [35 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Todo o trabalho de DEDEKIND sobre os *números algébricos*, *ideais* e *corpos* contribuem de forma decisiva na ampliação do corpo dos números reais a sistemas de hipercomplexos. Na abertura do trabalho intitulado *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten Komplexen Grössen*[128] – *Sobre a teoria das n unidades principais das quantidades complexas construídas* – publicado em 1885, ele declara que a sua pesquisa no campo numérico, intitulado por ele de corpo, pode ser utilizada quase que literalmente para os complexos. Sua intenção é acrescentar sistematicamente o elemento *dimensão n* no conceito numérico, não só do ponto de vista da geometria mas também do ponto de vista numérico, apresentando uma formalização dos hipercomplexos em termos da propriedade numérica da existência ou não existêcia de divisisores de zero [36 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Tem-se, assim, que os números complexos são números de um domínio de dimensão dois, ou seja eles podem ser escritos como um somatório de múltiplos de unidades relacionadas a dimensões. Assim $z = a + bi$, onde a é múltiplo da unidade 1 da dimensão $n = 1$, bi é múltiplo da unidade i da dimensão $n = 2$. DEDEKIND afirma, ao desenvolver esta *Teoria dos Complexos*, que sua intenção além daquela de fundamentar as afirmações

126 Dedekind aluía, ya por primeira vez en 1857, a los elementos del grupo de Galois no como substituiciones, sino como automorfismo de cuerpos." WUSSING, H. *Lecciones de Historia de las matemáticas*, *op. cit.*, p. 274.

127 DEDEKIND, Richard. *Gesammelt mathemtische Werke*. Zweiter Band. Braunschweig: Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., 1931, p. 43.

128 *Idem*, *ibidem*, p. 1.

geométricas de GAUSS sobre números complexos, era falar de números novos que corresponderiam aos sistemas de quantidades já existentes na Álgebra Superior. Retoma o trabalho de WEIERSTRASS e cria condições tais que a multiplicação de duas quantidades (*Grösse*) x e y de um domínio (*Gebiet*) G de dimensão n seja expressa por $(x \cdot y)^{(s)} = x^{(s)} \cdot y^{(s)}$. Caso n > 2, o produto xy de duas quantidades x, y diferentes que zero podem desaparecer, isto significa a igualdade xy = 0, assim como a existência simultânea da equação $x^{(s)}\ y^{(s)} = 0$ das n substituições correspondentes podem satisfazer a condição de que algum valor especial de cada uma das quantidades x, y desaparecem mas, no mínimo, uma delas é diferente de zero.

O conceito de números quando apresentado na perspectiva da dimensão, revela que os números com dimensão maior do que dois não satisfazem necessariamente a condição de não possuírem divisores de zero. O sistema dos números complexos é aquele de maior dimensão que satisfaz esta condição, ele é, portanto, o último a ter a garantia das quatro operações e de ser um *corpo*. Resultado confirmado na *Teoria Algébrica dos Corpos* de STEINITZ.

Um outro conceito, que pode ser apontado como uma noção de estrutura e que desde 1888 vinha sendo estudado por DEDEKIND é o conceito de *reticulados*, que se origina na *Teoria dos Números Naturais* e é denotado por ele de *Dualgruppen.* Este conceito é elaborado em uma nova versão em 1897, que apresentava um certo desvio de objetivo. Nesta versão ele tratava do cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de coleções de três ou quatro números, buscando decompor estes resultados em fatores próprios que, quando operados, obtinha certos números que ele chamou de *Kerne* - núcleos. O estudo das propriedades dos núcleos introduz o conceito de *Dualgruppe,* que será a fonte de inspiração de Garret Birkhoff e Oystein Ore por volta de 1930.

Pode-se afirmar que os conceitos usados por DEDEKIND, em sua grande maioria, tornam-se um importante núcleo para a Álgebra Estrutural, porém o papel desempenhado por eles em seu trabalho e na Álgebra Estrutural são diferentes. <u>A intenção de DEDEKIND era a de estudar as propriedades dos campos numéricos conhecidos e, para</u>

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

tanto, precisou elaborar seus instrumentos de trabalho, noções de estruturas, que posteriormente, na nova conjuntura algébrica, seriam tomados como germes de estruturas algébricas, principalmente por NOETHER [37 P1].

Quando pensamos nas noções matemáticas estruturais desenvolvidas por DEDEKIND do ponto de vista da abrangência da abordagem estrutural atual, elas podem nos parecer tímidas e empalidecidas por lidar unicamente com o domínio numérico, mesmo levando em conta que este domínio encontrava-se, naquele momento, atolado em incertezas que aos poucos o trabalho dos matemáticos diluiu. Porém, é importante observar que foi preciso o impulso inicial de desmembrar radicalmente a idéia numérica da geométrica, uma herança grega que constrói o conceito numérico através de características geométricas, para que surgisse um novo panorama que permitisse o vislumbre posterior de uma relação formalmente explicitada entre as áreas numéricas e geométricas [19 P3].

> Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

O esforço de DEDEKIND ao buscar um novo conceito numérico pode parecer, num primeiro momento, um movimento separatista, mas no entanto, seu trabalho contribuiu significativamente para a promoção de uma união sólida, fundamentada e devidamente equacionada destas áreas numa abordagem estrutural ao propiciar noções estruturais. A imagem da Álgebra revelada em seu trabalho aponta-o como um dos nascedouros das estruturas, circunstanciado pelas questões numéricas que abrangiam todos os tipos de números e, fundamentalmente, como foi descrito, os *números complexos* [17 P2].

> Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra– ser humano?*

Uma outra importante vertente estrutural, já citada neste texto, que se desenvolve ao longo da História da Matemática e não poderia deixar de ser considerada, é a *Teoria dos Grupos*, que tem seu nascedouro no trabalho de Evarist Galois (1811-1832).

A análise do ponto de vista da Álgebra Estrutural quando estendida ao trabalho de GALOIS, antecessor de DEDEKIND, pode-nos conduzir a pensar que este jovem francês muito pouco fez, que somente tenha pincelado, distraído, cores na ponta de um alfinete, por ter lidado

> Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

com um campo restrito, o campo das soluções de equações tratadas com uma das noções de estruturas mais simples, a noção de *grupo* [38 P1]. Porém, nem sempre a genialidade de um trabalho ou a abrangência de um olhar é medida pelo ângulo de visão aberto, mas sim pela profundidade que ilumina. E o trabalho de GALOIS é um exemplar deste tipo de genialidade. Segundo WUSSING Galois "/.../ realizou uma reorientação da matemática que possibilitaria o começo do pensamento estrutural, particularmente na Álgebra."[129] [39 P1]

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

GALOIS, como todos os seus antecessores que se ocupavam da resolução de equações, o conteúdo principal da Álgebra do momento, toma como ponto de partida para seus estudos o conhecimento já adquirido sobre as soluções, que ia desde as relações entre raízes e coeficientes expressas em fórmulas até o esboço de métodos gerais.

A corrida para alcançar a solução geral das equações de grau superior a dois era antiga e foi tema de concursos matemáticos da época. No século VI, buscava-se a resolução algébrica destas equações pela determinação de uma expressão matemática composta dos coeficientes da equação dada, que ao substituir a incógnita satisfizesse identicamente a equação.

Com o aumento dos graus da equação, aumenta-se também as dificuldades com os cálculos de radicais e as raízes "complexas" passam a ser cada vez mais freqüentes. Surge, então, no século XVII, maneiras cada vez mais sofisticadas e elegantes de cálculo. Para GALOIS[130], a elegância dos cálculos deveria ser coroada com um olhar intelectual (*intellektuellen Einsicht*). Ele afirmava que o único objetivo possível e sensato deste modo de elegância é o de poder ser simplificado, ou melhor dizendo, ser intelectualmente simplificado, já que eles pareciam ter eficácia metodológica limitada. O modo da simplificação é a fundamental característica de sua imagem da Álgebra, aquela que provoca uma mudança e traz uma nova imagem [20 P3].

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

---

[129] "Galois /.../ , llevó a cabo uma reorientación de las matemáticas que supondría el comienzo del pensamiento estrutural, en particular en el álgebra."WUSSING, H. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*, *op. cit.*, p. 194.
[130] Ver detalhes em WUSSING, H. *Die Genesis des Abstakten Gruppen Begriffes*, *op. cit.*, p. 73 – 85.

GALOIS lançou mão de resultados fundamentais para o esboço de sua teoria, que surgem de fontes às vezes não muito esperadas como é o caso do trabalho de Isaac Newton (1643–1727) intitulado *Arithmetica Universalis* e publicada em 1707, depois que ele já era famoso pela sua pesquisa no campo da Física. Nesta obra, ele faz um estudo de equações do terceiro grau examinando as relações entre os coeficientes da equação e o produto de potências de duas raízes da equação. Este estudo culmina no Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos[131] que afirma: qualquer polinômio simétrico de raízes de uma equação pode ser expresso em termos dos coeficientes da equação. Segundo EDWARDS, no enunciado do teorema nota-se que ele já trata de entidades algébricas e não de equações e raízes. O que já anuncia uma tendência à abstração. Além disso, Newton deixa claro, em suas fórmulas, que as raízes podem ser "falsas", isto é, negativas ou imaginárias, denotando sua incredibilidade à existência destes números.

Um outro resultado bastante importante para o projeto de GALOIS é apresentado no trabalho de LAGRANGE (1736–1813), *Réflexions sur la Résolution Algébrique des Equations – Reflexões sobre Resolução Algébrica de Equações*, por volta de 1774. Nesta obra, ele examina todos os resultados obtidos até então para as soluções de equações do terceiro e quarto graus e mostra como elas podem ser interpretadas como uma aplicação de um método que tinha como princípio a redução do grau da equação.

> Uma quantidade t, chamada a resolvente, é obtida como a solução de uma equação auxiliar chamada de equação resolvente, e as raízes da equação original são expressas em termos de t. Além disto, ele mostra com sucesso casos onde a resolvente tem a forma $x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1}x_n$ onde n é o grau da equação, onde os x_i são as raízes da equação, e onde α é uma das n raízes da unidade (não necessariamente primitiva).[132]

---

[131] Every symmetric polynomial in $r_1, r_2, \ldots, r_n$ can be expressed as a polynomial in the elementary symmetric polynomials $\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_n$. Moreover, a symmetric polynomial with interger coefficients can be expressed as a polynomial in $\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_n$ with integer coefficientes. EDWARDS, Harold M. *Galois Theory*. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1984, p. 9.

[132] "A quantity t, called the resolvent, is obtained as the solution of an auxiliary equation called the resolvent equation, and the roots of the original equation are expressed in terms of t. Moreover, he shows that in the successful cases the resolvent has the form $x_1 + \alpha^1 x_2 + \ldots + \alpha^{n-1}x_n$ where n is the degree of the equação,

Exemplo: para n = 4 tem-se como solução algébrica

$\alpha^2 + 1 = (\alpha^4 - 1) / (\alpha^2 - 1) = 0$, $\alpha = \sqrt{-1}$.

LAGRANGE procurou generalizar o método para qualquer grau, e mostrou que para equações de graus superiores a 4, a equação resolvente parecia ser de grau superior à equação dada e não passível de rebaixamento.

Apoiado nestes resultados, GALOIS denota K, um corpo, como sendo todas as quantidades conhecidas como números racionais, os coeficientes da equação f(x) = 0, certas raízes da unidade, formando um conjunto no qual as quatro operações são válidas com as propriedades conhecidas e sem divisores de zero e denota K (a, b, c, ...) como sendo o conjunto das funções dos coeficientes da equação f(x) = 0 em K, que determinam as raízes da equação dada. Sabendo-se que a equação tem coeficientes racionais e que as raízes poderiam ser *números complexos* [21 P3], [18 P2].

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

Assim, dado um polinômio específico $f(x) = x^2 + x + 1$ sobre o corpo dos números racionais Q, pela fórmula quadrática para as suas raízes, sabe-se que elas são $\dfrac{(1 \pm \sqrt{-3})}{2}$; assim o corpo Q ($\sqrt{-3}$) é o corpo das raízes de $f(x) = x^2 + x + 1$ sobre Q. Conseqüentemente, existe um elemento λ = -3 em Q tal que a extensão Q (ώ), onde $ώ^2$ = λ, contém todas as raízes de $f(x) = x^2 + x + 1$.

De um ponto de vista mais geral, dado um polinômio arbitrário do segundo grau $p(x) = x^2 + a_1x + a_2$ sobre K e sabendo-se que todas as raízes podem ser expressas pelos coeficientes, a extensão K (a_1, a_2) das funções racionais nas duas variáveis a_1, a_2 sobre K, contém $ώ^2 = a_1^2 - 4a_2$ e, portanto, todas as raízes de p(x). As raízes de p(x) estão em K (a_1, a_2) (ώ).

---

where the x_i are the roots of the equation, and where α é an nth root of unity (not necessarily primitive).” *Idem*, *ibidem*, p. 22.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*?

Como para nem todos os graus existem fórmulas universais com radicais para encontrar λ. GALOIS foca seu estudo na natureza das raízes e faz uso das construções sistemáticas das permutações [40 P1], [22 P3] realizadas por Cauchy (1789 – 1857) para definir "um V resolvente" como sendo um polinômio das raízes da equação dada de grau n, V = φ (a,b,c,....), exemplo: V = a + 2b + 3c + ..., de tal forma que as n! permutações das raízes mudassem V, quando fixado uma raiz por vez, formando um grupo de permutações e, além disso, que todas as raízes da equação pudessem ser expressas em termos de V, fazendo K (a, b, c...) = K (V), onde V é elemento primitivo e raiz de uma equação irredutível, polinômio pelo qual o polinômio da equação dada é divisível.

GALOIS investiga a inclusão de raízes da unidade de radicais com expoentes primos na extensão do corpo apoiando-se no trabalho de GAUSS que já havia provado que estas raízes podem ser expressas por meio de radicais menores do que o número primo, fundamentado no conceito de congruência.

GALOIS introduz as raízes imaginárias das congruências irredutíveis, como também investiga a relação do *grupo* de permutação originário com o *grupo* de permutações depois da extensão do *corpo*, para então concluir a condição de solubilidade, que culmina no teorema Clássico de Abel: O polinômio geral de grau $n \geq 5$ não é resolúvel por radicais.

Tanto a obra de GALOIS como a de DEDEKIND apresentam noções de estruturas que se mostram em seus futuros matemáticos como possibilitadoras do movimento da construção do conhecimento *das estruturas da Álgebra.*

As obras destes dois matemáticos europeus possuíam uma característica em comum: elas tinham como solo de investigação os números, como também as inquietações advindas do surgimento de números desconhecidos ou não convenientemente explicitados, apontando para um terreno onde as raízes *das estruturas da Álgebra* estão fincadas, o território hoje denominado de números complexos.

Esses números constituem um circunstancial matemático propulsor das noções estruturais construídas que se mostram no

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

decorrer da *análise intencional retrospectiva* como sínteses de transição que sustentam e possibilitam o movimento da construção/produção do conhecimento *das estruturas da Álgebra* [19 P2].

Portanto, será preciso compreender esse circunstancial em que as noções estruturais se dão, para que se possa destacar o desempenho desses números na construção/produção *das estruturas da Álgebra.*

2. SOBRE O CIRCUNSTANCIAL MATEMÁTICO PROPULSOR DAS ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA

> Não se pode fugir ao sentimento de que essas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria, de que são mais sábias do que nós, mais sábias até do que seus descobridores, de que obtemos mais delas do que originalmente foi posto nelas.
>
> Heinrich Hertz

A *análise intencional* a ser efetuada, a partir de agora, busca uma imagem que emerja da construção do conhecimento dos *números complexos* no corpo do conhecimento da Matemática ocidental com a finalidade de tecer uma compreensão do desempenho desses números como propulsor circunstancial *das estruturas da álgebra.* Perguntas como: como surgem os números complexos? O que são ou o que eram estes números? Quem são e foram eles para disparar tamanha mudança na conjuntura algébrica? devem direcionar doravante a pesquisa.

Embora algumas dessas questões já se encontrem explicitadas nos textos de História da Matemática sob diversas perspectivas que incluem aspectos sociais, econômicos, políticos e matemáticos, pretende-se, nessa etapa da pesquisa, revisitar alguns dos acontecimentos matemáticos, analisando-os numa abordagem histórico-filosófica, que contemple os números complexos no corpo do conhecimento matemático enquanto tradição e, mais do que isto, que possa revelar a sua atuação no movimento da construção/produção *das* *estruturas da Álgebra, s*em, no entanto, perder de vista que a construção do conhecimento desses números foi sendo validada nas condições da validação futura, ou seja, aquela do presente histórico expressa em termos de teorias matemáticas, numa linguagem axiomática. Portanto, a análise deve contemplar a construção do conhecimento dos *número complexos* explicitando seu passado, seu presente - enquanto propulsor circunstancial *das estruturas da álgebra* - e seu futuro matemático, o presente atual.

A análise intencional do circunstancial matemático propulsor das estruturas da Álgebra será apresentada em duas etapas: *Uma análise histórico-filosófica da construção do conhecimento dos números complexos* e *Conceituação Fenomenológica dos imaginários*.

2.1. UMA ANÁLISE HISTÓRICO-FILOSÓFICA DA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Encontra-se, no livro de Gilles Gaston Granger[133], uma abordagem bastante promissora para os fins aqui propostos ao ser elaborada uma obra cujo tema é o *irracional* compreendido de modo abrangente sob várias perspectivas que não só aquela da Matemática, no surgimento dos números irracionais. A pretensão da obra é extrair da noção de *irracional* seus aspectos positivos, contrariando não só a forma lingüística da palavra que se manifesta como negativa, mas também explicitar aquilo que ela denota sob um outro enfoque que não o da negação radical da *racionalidade*, sem, no entanto, fazer uma apologia do *irracional*. Nas palavras do autor:

> Meu projeto neste livro é mais modesto. Consiste em considerar o sentido e a função do irracional em certas *obras* humanas, em certas criações maiores do espírito humano, e mais particularmente nas obras da ciência.[134]

---

[133] GRANGER, Gilles Gaston. *O irracional*. Trad. Álvaro Lorencini. São Paulo: Unesp, 2002.
[134] *Idem*, *ibidem*, p. 12.

Inicialmente, o autor descreve sucintamente a tênue região de contato entre a *racionalidade* e a *irracionalidade* afirmando ser a *irracionalidade* eminentemente polimorfa. É ela que delineia as formas do *racional* como também é ela que evidencia o contrário da obra realizada. A *irracionalidade* aparece quando a produção da obra foge de uma certa determinação processual que constitui o trabalho de formalização do qual a obra é gerada e que determina a sua natureza e o seu processo de criação, que obviamente se tornou demasiado restrito ou estéril.

Nesta perspectiva, o autor distingue três tipos significativos de *irracionalidade*. O *irracional* apresenta-se como *obstáculo*; como *recurso* e como *renúncia*. Os tipos podem ser refletidos sob três perspectivas. Como *irracional epistêmico*, como *irracional técnico* e como *irracional axiológico*. GRANGER apresenta o seguinte quadro classificatório:

	EPISTÊMICO	TÉCNICO	AXIOLÓGICO
OBSTÁCULO	Paradoxos (resolvidos)	Dificuldades (superadas)	Doutrinas Pragmáticas
RECURSO	Conceitos Contraditórios	Processos Empíricos	Doutrinas Dogmáticas
RENÚNCIA	Falsas ciências	Práticas míticas	Schärmerei[135]

Para cada linha sugerida são apresentadas obras científicas e artísticas no intuito de exemplificar e analisar o *irracional*. Embora sejam as apresentações extremamente interessantes e diversificadas e a descrição de um tipo quando analisado nas três perspectivas propostas muitas vezes complementem a apresentação de um outro tipo, aqui será feito um recorte e abordar-se-á o que estiver diretamente relacionado com o número complexo.

O tipo do *irracional como obstáculo* aparece no objeto criado como uma oposição às regras da própria criação, impossibilitando suas aplicações. Porém, o autor jamais desiste frente ao fracasso e continua sua obra. O encontro com o *irracional* é, neste caso, o ponto de partida para uma reconquista da *racionalidade*. O processo matemático fornece bons exemplos deste tipo, pois ele solicita soluções. O *irracional como obstáculo epistêmico* ocorre quando, no processo de conhecimento, surge uma propriedade que

[135] Schwämerei – do alemão: aquilo que se refere à ilusão, ao fantástico.

impede o seu prosseguimento. Neste caso, pode-se assumir, pelo menos provisoriamente, a contradição para obter-se resultados novos. Este seria um momento do trabalho de constituição científica do objeto dentro do *corpo de conhecimento*. O *irracional como obstáculo técnico* revela-se todas as vezes que surgirem processos mais eficazes e mais econômicos, que são relativos no sentido de poderem corresponder à aplicação de regras não necessariamente associadas a um saber científico. Porém, a falta do científico não impede que tais práticas irracionais tenham sucesso e, muitas vezes, bastam as necessidades dos homens para garanti-las, mesmo que por tempo limitado. O *irracional como obstáculo axiológico* consiste na ausência de coerência de um sistema de valores, não por contradição lógica interna do sistema, mas por impossibilidade de sua aplicação. Neste caso, temos a incompatibilidade de doutrinas éticas que estão separadas pragmaticamente.

Pode-se compreender os eventos histórico-matemáticos ocorridos na construção do conhecimento dos *números complexos* como manifestações do *irracional.* Nos acontecimentos matemáticos que dizem do seu surgimento, atua *como obstáculo* nas operações imposíveis de serem executadas. No processo da constituição do objeto matemático *número complexo* a *irracionalidade* atua como *obstáculo técnico*, como *obstáculo axiológico* e como *obstáculo epistêmico*. Atuações que, em alguns momentos, se entrelaçam.

A análise do desempenho dos *números complexos* no circunstancial matemático propulsor *das estruturas da Álgebra*, na perspectiva da *irracionalidade*, inicia-se nas buscas matemáticas por soluções dadas aos *números complexos* no âmbito da Aritmética, que será exemplificada por um breve comentário sobre os trabalhos de Willian Rowan Hamilton (1805-1865) e sobre o trabalho de DEDEKIND.

CARTAN[136] em seu artigo *Números Complexos - Nombres Complexes* - descreve a teoria das duplas de números de HAMILTON como sendo um ponto de vista aritmético dos *números complexos*.

HAMILTON em seu trabalho, publicado em 1837 intitulado *Teoria de funções conjugadas, ou duplas algébricas - Theory of Conjugate Funcion, or*

Algebraic Couples, define uma dupla de números como sendo um par ordenado, (a,b). Em seguida, define a igualdade entre dois pares e as quatro operações entre dois pares de números, assim como também uma decomposição do par em termos das definições das operações:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)$$

Considera o número real x como sendo da forma $(x,0)$; $(0,1)=i$ e $(0,-1)=-i$ como soluções da equação $(x,y)^2=(-1,0)$. Desta maneira o número da forma $a+bi$ ou $a+ib$ é um caso particular das duplas numéricas e pode ser escrito como (a,b) onde $a,b\in R$. Seu trabalho sobre os *números quatérnions* de 1853, desembocou nas relações numéricas não comutativas, mostrando que a permanência das leis de composição não era sempre possível. HANKEL em seu trabalho *Teoria do Sistema dos Números Complexos* - *Theorie der complexen Zahlensysteme* - de 1867, refere-se à imagem do trabalho de HAMILTON afirmando:

> /.../ as leis de composição não são propriedades dos números, senão que, ao contrário disto, as leis de composição estabelecidas por definição criam o campo numérico correspondente.[137]

Essa afirmação pode ser verificada na descrição dada sobre o trabalho de HAMILTON, que iniciava-se na definição das leis de composição. Esse trabalho é de relevância para a análise aqui efetuada, porque ele é um exemplo do desempenho desses pares de números que atuam como *obstáculo epistêmico,* pois levam a determinar regiões numéricas não comutativas, *números quatérnions,* que desafiavam a permanência das leis operacionais, ou seja, eles determinam uma nova *racionalidade* na álgebra dos números.

DEDEKIND, caminhando numa direção diferente da de HAMILTON, utiliza-se das propriedades numéricas para definir seus conceitos, apontados nesta tese, como noções estruturais, ao desenvolver sua teoria de números

---

[136] CARTAN (Nancy). Nombres Complexes. Exposé, D´Après Làrtile Allemand de E. STUDY (Bonn), par E.. In: [s/d].

[137] /.../ las leyes de composição no son propriedades de los números, sino que antes bien, al revés, las leyes de composição estabelecidas por definición crean el correspondiente campo numérico. WUSSING, Hans. Lecciones de Historia de las Matemáticas. *Op. cit.*, p. 210.

hipercomplexos em 1885. Ele não tinha somente o propósito de fundamentar algebricamente as afirmações geométricas de GAUSS sobre os *números complexos*, mas ainda anunciar um novo conceito de número. Este é, também, um exemplo da atuação dos *números complexos* no papel de *irracional como obstáculo epistêmico*, pois seu trabalho aponta para a possibilidade da existência de sistemas numéricos que possuam divisores de zero, que sejam diferentes de zero, quando a dimensão numérica for maior do que 2.

Ao enfrentar a *irracionalidade* posta pelos *números complexos*, quando tomados unicamente numa interpretação geométrica, cria-se uma nova *racionalidade* numérica, que apresenta os números complexos de ordem superior como os quatérnions e os hipercomplexos. A solução dada pela interpretação geométrica à *irracionalidade* primeira acomodou com sucesso o obstáculo enquanto operações impossíveis e abre um campo imenso de possibilidades matemáticas, tanto no âmbito da Análise Matemática quanto na criação de uma nova Aritmética. É preciso compreender-se, portanto, o porquê do sucesso da interpretação geométrica. Segundo GRANGER:

> /.../ a remoção completa do obstáculo que a irracionalidade constitui só terá lugar quando os novos objetos forem integrados num universo em que se encontrem diretamente associados a um sistema operatório, e até certo ponto definidos como operadores. Esse é exatamente o sentido que reconhecemos nos ensaios de Wessel e Argand e nas páginas decisivas de Gauss.[138]

Carl Friedrich Gauss, em 1831, realiza um trabalho decisivo explicitado nas últimas páginas da obra intitulada *Theoria residuorum biquadraticorum*, que na avaliação de GRANGER é a união de duas formas de racionalização: a racionalização por representação intuitiva num espaço e a racionalização abstrata por formulação de regras de composição algébrica. O seu objetivo é o de dar sentido a objetos simbólicos que se adaptam perfeitamente aos cálculos, mas que não se ligam aos objetos da Análise e da Álgebra.

Nesta obra, GAUSS inclui, nas características numéricas, uma ordem que dá sentido ao "mais" e ao "menos", considerando objetos que não poderiam ser ordenados numa única seqüência. Os objetos seriam, portanto, ordenados por "seqüência de seqüência". A seqüência dupla seria, portanto, a resultante de seqüências que teriam a passagem de +1 a –1 e de +i a –i. GAUSS sugere uma representação intuitiva espacial como sendo um plano dividido por paralelas ortogonais, cujas "unidades de medida" de cada cruzamento seriam +1, -1 e +i ,-i.

O trabalho de Jean Robert Argand, de 1829, mostra que todas as semi-retas de um plano que partem de um mesmo ponto podem ser algebricamente representadas em seus comprimentos e direções simultaneamente e representa os *números complexos* em duas dimensões, utilizando-se de médias proporcionais para definir direções em um círculo.

O trabalho de Casper Wessel, de 1789, publicado em *Memórias da Academia da Dinamarca*, cujo objetivo era o de apresentar uma representação algébrica dos segmentos de reta no plano, assim como também o de elucidar e suprir a impossibilidade de certas operações numéricas. As operações impossíveis são apresentadas, de maneira muita clara, na sua tabela da operação de multiplicação, em que:

$\varepsilon^2 = -1$ portanto $\varepsilon = \sqrt{-1}$

	+ 1	- 1	ε
+ 1	+ 1	- 1	ε
- 1	- 1	+ 1	- ε
ε	ε	- ε	- 1

> Wessel deduz daí a expressão de uma linha qualquer de comprimento, unidade, ou raio, que sai da origem e forma um ângulo v positivo com a direção da linha unidade +1, como soma vetorial de suas projeções sobre as duas linhas unidades +1 e ε: cos v + ε sen v, e a expressão de uma linha de comprimento r por r (cos v + ε sen v) /.../ Daí deriva uma representação das quantidades que chamamos complexas."[139]

Assim, os trabalhos de WESSEL, de ARGAND e de GAUSS contribuiram para remover por completo a *irracionalidade* posta pelas operações impossíveis. O sucesso da empreitada vem do fato de que, ao diluir o obstáculo das operações impossíveis, também apresenta novos valores éticos

---

[138] GRANGER, Gilles Gaston. *O Irracional*, *op. cit.*, p. 79.
[139] GRANGER, Gilles Gaston. *O Irracional*, *op. cit.*, p. 72.

matemáticos que vão compor uma nova racionalidade axiológica relativa à interpretação geométrica, podendo por uma ordem num mundo de opiniões, pareceres e argumentações sobre a aceitação ou não aceitação das operações com os *números complexos* que rondavam a época de incertezas numéricas, registradas no trabalho de CARDANO, de 1545, com o surgimento de raízes negativas, incluindo opiniões de matemáticos como Simon Stevin (1548–1620), que as aceitava como números, e de pensadores como René Descartes (1596–1650), que as considerava falsas inicialmente e depois, em 1637, denominava-as de *imaginárias*.

Os protagonistas desta façanha - WESSEL, ARGAND e GAUSS - tomavam o *número complexo* como uma composição expressa por a + bi ou por r (cos v + ε sen v) e os entendiam como sendo uma classe de números. O fato de ser o número complexo algo composto de duas partes foi um essencial avanço para que surgisse a nova racionalidade operacional finalizada por GAUSS. Este avanço está registrado no trabalho de MOIVRE, publicado em *Philosophical Transactions,* de 1739, ao extrair a raiz cúbica da expressão $a+\sqrt{-b}$ e supor que ela fosse da forma $x+\sqrt{-y}$. Ele calcula o valor das três raízes, comparando a equação destas raízes com a equação trigonométrica de trissecção de um ângulo e tomou isto como sendo uma comprovação da natureza numérica dos complexos, onde a é real e $\sqrt{-b}$ é *imaginária*.

Como se pode notar no trabalho de MOIVRE, as operações com o *imaginário* seguem sendo executadas sem quaisquer constrangimento. O autor, mesmo frente ao obstáculo das operações impossíveis, continuou sua obra em busca de solução com as ferramentas operacionais que possuía. Embora o objeto primeiro, $\sqrt{-b}$, ainda não fosse aceito, redefine-o como um objeto composto, $a+\sqrt{-b}$ permitindo que o *irracional como obstáculo epistêmico* do objeto primeiro fosse superado, pois a expressão $a+\sqrt{-b}$, ao ser até então analisada, era vista somente nas suas características como sendo a raiz de um número negativo, $\sqrt{-b}$, o *imaginário*.

O período em que o *imaginário* é o foco das atenções demarca a fase das operações impossíveis que se caracteriza como uma apropriação "cega" dos cálculos e que potencializa o caráter de irracional dos complexos como *obstáculo* em seu surgimento. As operações impossíveis fazem-se presentes na Análise Matemática, principalmente, nos trabalhos de Leonard Euler (1707–1783), Gottfried Wilhem Leibniz (1646–1716) e Johann (Jean) Bernoulli (1667-1748), com o surgimento dos logaritmos, e na Álgebra, nos trabalhos de Albert Girard (1595–1632), Rafael Bombelli (1526–1572) e Gerolamo Cardano (1501–1576), com o surgimento dos radicais de números negativos nas resoluções de equações.

Os logaritmos têm como idéia básica as relações entre os termos de uma progressão geométrica $1, r, r^2, r^3, \ldots.$ e uma progressão aritmética $0,1,2,3,\ldots$, formada por seus expoentes, definidas em termos das operações de multiplicação e divisão. Os logaritmos aparecem pela primeira vez no trabalho de Michael Stifel (1487–1567) intitulado *Arithmetica Integra* e são por ele estendidos posteriormente para as conexões existentes entre progressões de expoentes negativos e fracionários. Tornam-se, a partir de então, um poderoso artifício de cálculo.

Segundo GRANGER, a questão dos logaritmos dos números negativos surge de forma indireta pelas correspondências entre LEIBNIZ e BERNOULLI ocorridas entre 1712 e 1713 ao discutirem a ordem relativa dos números positivos e negativos.

LEIBNIZ parte da afirmação de Antoine Arnaud de que a proporção $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$ não pode ter sentido, pois a relação entre maior e menor está posta como igual à relação entre o maior e menor e aprova esta constatação usando o seguinte argumento:

$\log\left(\frac{-1}{1}\right) = \log(-1) - \log 1 = \log(-1)$, pois $\log 1 = 0$ e

$\log\left(\frac{1}{-1}\right) = \log 1 - \log(-1) = -\log(-1)$. Ele analisa o $\log(-1)$, e conclui:

> /.../ que o $\log(-1)$ não pode ser real, mas imaginário: "Superest ut sit non verus sed imaginarius". Leibiniz acrescenta que se tal logaritmo existisse como número "verdadeiro", ele deveria ser o dobro do logarítmo do número $\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$. /../ Vemos que para Leibniz, de um lado, a noção de número designado agora como "imaginário" estendeu amplamente seu sentido

> originário de resultado de uma operação impossível. Na verdade, ele considera realmente a existência simbólica de tais números, que na verdade não são "verdadeiros" números "embora no cálculo eles possam ser introduzidos utilmente e com segurança".[140]

LEIBNIZ chega a afirmar que os *logaritmos imaginários* não suportam o rigor mas são de grande uso no cálculo e na arte de inventar. Em contra-partida, seu correspondente BERNOULLI defende a existência de logaritmos negativos, porém atribuindo-lhes valores reais, e tenta construir sua argumentação usando duplicação da curva logarítmica. Por causa das contra-argumentações de LEIBNIZ, BERNOULLI apresenta, para introduzir o logaritmo de uma raiz quadrada, uma sofisticada distinção entre a divisão por 2 do logaritmo do número e a média proporcional entre a unidade, positiva ou negativa, e este número, com a finalidade de recusar a parte imaginária. Além disso, ainda argumenta que estes elementos, chamados de imaginários, desaparecerão ao final dos cálculos. Toma como exemplo a relação entre as tangentes de ângulos múltiplos entre si, $x = tg\alpha$ e $y = tgn\alpha$, chegando à expressão $\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n = \frac{y-i}{y+i}$ em que, quando os termos são multiplicados em cruz, os imaginários desaparecem.

Estas discussões não efetivaram avanços no sentido da construção de um sistema de objetos que mais tarde pudessem ser chamados de *números complexos*, mas foram tomadas como referência por EULER em um trabalho de 1749. Ao analisar estas obras, EULER detecta que as contradições entre eles são aparentes, pois admitem que a cada número só corresponderia um logaritmo. Ele calcula $\log(-1)$ assumindo mais de uma solução e apresenta as soluções:

$\log a = A \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ e $\log(-a) = A \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$, onde A é o logaritmo real da quantidade positiva a e λ um inteiro qualquer.

Adverte ainda que a forma geral destas quantidades é $a + b\sqrt{-1}$ e calcula $\log\left(a + b\sqrt{-1}\right) = \log\sqrt{\left(a^2+b^2\right)} + (\phi + 2k\pi)\sqrt{-1}$, com $\phi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

---

[140] *Idem*, *ibidem*, p. 59.

É, portanto, EULER quem dá um desfecho à questão não só dos logaritmos negativos, mas também dos *imaginários* e suas quatro operações básicas. Em 1777 introduz o símbolo i e operou com ele como sendo $i^2 = -1$.

A forma $\sqrt{-b}$ aparece no cálculo de raízes de equações publicados na obra de CARDANO de 1545, *Ars Magna*, que tratava da resolução de equações do terceiro e quarto graus motivado pelos estudos de Nicolò Tartaglia (1499–1557). Ao estender o método de resolução de equações do tipo $x^3 - px = q$, CARDANO depara-se com a expressão intermediária da forma $w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}$ que compunha o cálculo final das raízes, onde uma das raízes é da forma $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w}$. Ele observa que w pode vir a ser da forma $\sqrt{-b}$ e afirma que, quando isto ocorre, trata-se de um caso irredutível.

No capítulo 37 de *Ars Magna*, embora considerando que as raízes negativas não tenham autorização para fornecer raízes verdadeiras de equações, CARDANO continua calculando com tais números, e isto fica muito claro ao resolver um problema velho e conhecido apresentado muitas vezes nos textos de História da Matemática e em livros textos de Matemática.

> O segundo modo destes recebimentos falsos, diz Cardano [1], é através de uma raiz de menos, *per radicem* ~m. Deve, por exemplo, dividir-se 10 em duas partes, cujo seus produtos sejam 40, isto é uma exigência impossível, mas nós procedemos assim: tome a metade de 10, ou seja 5, multiplique 5 por si mesmo, dá 25; tire 40, o produto exigido, assim fica –15, a raiz deste somado de 5 e subtraído de 5 fornece as partes $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$. O produto que aparece de modo cruzado desaparece, *dimissis incruciationibus*, e surge 25 menos –15, que é tanto quanto +15. O produto é 40.[141]

---

[141] "Die zweite Art einer falschen Annahme, sagt Cardano [1]), ist die durch eine Wurzel aus Minus, per radicem ~m. Soll z.B. 10 in zwei Theile getheilt werden, deren Product 40 sei, so ist das offenbar eine unmögliche Forderung, aber wir verfahren so: nimm die Hälfte von 10, also 5; vervielfache sie mit sich selbst, gibt 25; ziehe 40, das verlangte Product davon ab, so bleibt –15, dessen Wurzel zu 5 addiert und von 5 abgezogen die gewünschten Theile $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ liefert. Vervielfache $5+\sqrt{-15}$ mit $5-\sqrt{-15}$. Die kreuzweise entstehenden Producte fallen weg, dimissis incruciationibus, und es entsteht 25 minus –15, was so viel ist wie +15. Das Produkt ist also 40." CANTOR, Moritz. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Zweiter Band. Leipzig: von B. G. Teuber, 1913, p. 508.

CANTOR analisa os próximos encadeamentos de CARDANO e considera que ele possuía uma visão que ia além das abordagens matemáticas conhecidas e afirma:

> /.../ isto quer dizer, estas são quantidades (*Grösse*) dependentes da lógica formal, porque o processo de cálculo não é permitido a elas, como o é, no exercício das quantidades negativas puras e outras, e muito menos dar-lhes um sentido.[142]

Importante ainda salientar que, para CARDANO, estas quantidades (*Grösse*)[143] são impossíveis e que, no capítulo XVIII de seu livro, já apresenta algumas das relações entre raízes e coeficientes. É BOMBELLI, grande admirador da obra *Ars Magna*, embora a admitisse ser uma obra não muito clara, que traz em seu primeiro livro de *L'Algebra,* em 1572, um capítulo dedicado a cálculos de radicais, em especial raízes quadradas e cúbicas como também, em um segundo capítulo, uma discussão completa dos "casos irredutíveis" de CARDANO, utilizando seus resultados: as regras para resolução das equações de terceiro e quartos graus.

BOMBELLI resolve a equação $x^3 = 15x + 4$ e acha $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, faz $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}$, desta igualdade resulta[144] q = 1 e p =2. Portanto

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$, assim ele consegue operar, mesmo que de forma particular, com raízes negativas. Introduz uma notação para $\sqrt{-1}$, *piú di meno* e *meno di meno* para $-\sqrt{-1}$ em suas regras de cálculo. Ao apresentar sua técnica, ela supera, por um tempo, o irracional como um obstáculo de $\sqrt{-1}$. Esta técnica será suplantada nas questões conceituais e operacionais por MOIVRE, ARGAND, WESSEL e GAUSS, citados anteriormente, por ser somente aplicável a casos que se anulam.

---

142 "/../ d.h. es ist dieses eine auf formaler Logik beruhende Grösse, weil es nicht gestattet ist, die Rechnungsverfahren an ihnen wie an reinen Minusgrössen oder an anderen zu úben, noch einem Sinne derselben nachzustellen." *Idem*, *ibidem*, p. 508.

143 Nota da autora: a palavra *grösse* está explicitada no item *Sobre o movimento de construção/produção das estruturas da Àlgebra* dessa tese.

144 Detalhes de cálculo em VAN DER WAERDEN, B. L. A *History of Algebra, op. cit.*, p. 60.

Porém, ela se mostra de grande valia para as questões práticas da humanidade e incentiva o surgimento de uma disciplina matemática independente chamada Álgebra. Além do mais, contou com fortes partidários como GIRARD, que em sua obra de 1629, *Invention nouvelle en L'algèbra,* anuncia saber que toda equação tem o mesmo número de raízes que seu expoente e que o coeficiente de uma potência do desconhecido compõe-se da combinação de raízes. Quando perguntado sobre a utilidade das raízes imaginárias, GIRARD afirma serem elas importantes para saber que não há mais nenhuma outra raiz e que elas reafirmam o conhecimento quanto ao número de raízes. Portanto, as raízes negativas não poderiam deixar de ser observadas.

Ao reconsiderar os eventos históricos da construção de conhecimento dos *números complexos* no sentido de esclarecer a questão que evoca o desempenho desses números no movimento da construção *das estruturas da Álgebra* na perspectiva proposta por GRANGER, percebe-se que o obstáculo das operações impossíveis iniciais, aquelas que diziam respeito à $\sqrt{-b}$, aquieta-se quando atingida uma técnica compatível à racionalidade conhecida, causando certas acomodações. Mas com o passar do tempo o obstáculo volta a incomodar. O incômodo surge, muitas vezes, pela limitação da própria técnica atingida, que aclama por um aprimoramento, deixando à amostra a *irracionalidade* parcialmente aquietada. A técnica, ao ser aprimorada, na tentativa de suprir a *irracionalidade* posta, faz com que os objetos primitivos apareçam não mais tanto como casos particulares, porém como projeções dos objetos novos no espaço antigo. A identificação entre objeto novo e sua projeção caracteriza-se por elementos que vão muito além daqueles, de uma técnica pela técnica. Estes elementos podem ser constatados também nas transformações conceituais, em momentos históricos de grande magnitude e na transmissibilidade cultural que descreve a passagem do topar-se com a impossibilidade operacional de um número impossível: $\sqrt{-b}$ como imaginário, do imaginário à $a+\sqrt{-b}$ como complexo e, depois, do complexo a uma formatação estrutural que abrangeria todos os números possíveis de serem imaginados, exemplos aqui citados nas obras de HAMILTON e DEDEKIND.

Assim, ao resolver os "paradoxos amigos" impostos na construção/produção dos *números*

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

complexos é que desponta uma nova *racionalidade*, o germe de um novo modo de pensar, o pensar estrutural. As *noções de estrutura* não surgem como um *obstáculo*, mas sim como um *recurso*, como um instrumento para compreender os impossíveis, os imaginários, os complexos, ou seja, poder reconhecer todos os tipos de números conhecidos como sendo de uma mesma família [20 P2]. A *estrutura da Álgebra* é uma criação que emerge do circunstancial constituído ao suprir-se, por completo, a *irracionalidade* presente nos números até então constituídos[41 P1].

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

2.2. CONCEITUAÇÃO FENOMENOLÓGICA DOS IMAGINÁRIOS

O recurso analítico utilizado que visa a compreensão do circunstancial matemático propulsor *das estruturas da Álgebra* na perspectiva do *irracional*, fornece dados sobre o desempenho dos *números complexos* no âmbito do surgimento das noções estruturais e da superação do obstáculo operacional, evidenciando importantes aspectos ontológicos do nascedouro *das estruturas da Álgebra*. Contudo, ao ter-se a intensão de explicitar as *estruturas da Álgebra* em sua temporalidade, como uma construção de sínteses de transição será preciso dar aos *números complexos* um status que corresponda à matemática validada na contemporaneidade.

Na análise histórico-filosófica realizada não se evidencia o desempenho dos *números complexos* inseridos no corpo do conhecimento matemático enquanto objeto matemático validado pelo conhecimento da atualidade, ou seja, expresso em uma linguagem axiomática. Frente a isto, a pergunta colocada inicialmente: *quem são ou foram os complexos para disparar tamanha mudança na conjuntura algébrica?* precisa encontrar resposta em outra perspectiva.

Esta questão exige um estudo que adentre a região da Lógica Formal que embasa a consistência dos sistemas matemáticos e que possa deixar vir a tona outros aspectos ontológicos ao se perguntar: quem são os *números complexos* de uma perspectiva do sistema axiomático formal? Com isto exige também a elucidação de aspectos epistemológicos ao se perguntar: como justificar o uso dos *números complexos* na matemática?

Estas duas questões são pertinentes à região de inquérito da Filosofia da Matemática e podem ser abordadas por diferentes correntes filosóficas, porém aqui serão tratadas numa perspectiva fenomenológica da Filosofia da Matemática de HUSSERL. A escolha da perspectiva se justifica pelo fato de ser uma abordagem filosófica que se mostra em concordância com a perplexidade exposta no início desta tese a respeito do conhecimento científico que ainda *sabe de sua fonte*.

Para uma melhor compreensão das idéias fenomenológicas que aqui serão abordadas será preciso abrir-se um pequeno parênteses no sentido de expor as intenções do filósofo e algumas de suas idéias.

Na leitura de SILVA, a posição provável de HUSSERL, ao referir-se ao seu papel de filósofo, à matemática e aos seus criadores é:

> Se isto é o que eles pensam, o meu trabalho como um filósofo é investigar o que em suas experiências com objetos matemáticos faz com que eles pensem assim.[145]

HUSSERL não se colocava na posição de justificar ou de negar crenças matemáticas. Sua indagação tinha o propósito de contemplar tanto os aspectos da Matemática em sua origem (*Ursprung*), como também a Matemática Formal, e principalmente, perseguia a interrogação: como podemos fundamentar racionalmente a atividade matemática no mais amplo contexto da cognição humana?

Dada a complexidade da meta a ser realizada pela Fenomenologia e conseqüentemente pela Filosofia da Matemática husserliana, as idéias fenomenológicas sofrem complementações no decorrer da elaboração teórica realizada por HUSSERL, em consequência disto algumas noções fenomenológicas se ampliam. Portanto, é importante salientar que a noção de origem (Ursprung) que está sendo adotada nesta tese é aquela exposta nos últimos trabalhos de HUSSERL. Origem designa as sínteses intencionais pelas

---

[145] "/.../ if this is what they think, it is my job as a philosopher to investigate what in their experience of mathematical objects make them think so. " SILVA, Jairo José da. *Husserl's Philosophy of Mathematics*. Manuscrito, Campinas, XVI(2), 1993, p. 146.

quais os objetos concretos, aqueles das primeiras realizações, são constituídos como idealidades no fluxo temporal por atos de evidência que se dão na cognição.

Outros fundamentos e características que compõem a Filosofia da Matemática husserliana ficarão evidentes na exposição da resposta que dá ao analisar os *números complexos* na perspectiva de um sistema axiomático formal, um trabalho iniciado em 1890 e, mais tarde, em 1901, numa versão mais elaborada, apresentada à Sociedade de Matemática em Göttingen e, em 1913, em *Ideen*.

O trabalho de HUSSERL sobre os *números complexos* inicia-se com a construção da *noção de completude*. Ele parte de sistemas axiomáticos completos, aqueles que apresentam condições semelhantes a da completude de HILBERT. Embora HUSSERL e HILBERT se conhecessem, os seus trabalhos têm diferenças e foram realizados de forma isolada.

HUSSERL notou que a articulação entre sistemas axiomáticos completos não poderiam justificar tudo aquilo que acontece na Matemática. Um exemplo destes acontecimentos são os *números naturais* em conexão com os *inteiros*, já citados neste texto, ao comentar-se a análise que o historiador BELL realiza sobre generalização e abstração, porém agora submetidos a uma outra perspectiva de estudo.

Quando se quer esclarecer como se dá a extensão dos naturais aos inteiros, a dificuldade apresenta-se no momento em que se considera que qualquer *número inteiro* obedece a *lei do cancelamento*. Porém, há *números inteiros* que também são naturais. Estes números, quando tomados como sendo *números naturais*, não obedecem esta lei. Alguma coisa está presente no *sistema dos inteiros* que não compactua plenamente com o sistema dos naturais, que são os *números negativos*. Eles não são elementos que podem dar resposta à pergunta: quantos são? Poder dar resposta a esta questão é aquilo que conceitua os números naturais; portanto, os *números negativos* não existem para os *números naturais*.

Este tipo de acontecimento está presente em vários momentos da construção dos números, por exemplo, na introdução dos *irracionais*, dos *imaginários* e dos *complexos*, como exposto na análise histórico-filosófica. A todos os protagonistas deste tipo de evento, os *números irracionais*, os *negativos*, os *imaginários*, os *complexos*, HUSSERL chamou de *entidades imaginárias*.

A análise apresentada sobre as extensões numéricas é importante porque detecta problemas ontológicos e epistemológicos, pois em sistemas definidos a noção de derivabilidade é um equivalente formal de verdade. Portanto, a pergunta *o que é um sistema axiomático definido?* coloca-se e conduz a busca de respostas, irremediavelmente, no âmbito da Lógica Formal, que aqui também será tratada na perspectiva husserliana.

Assim, será preciso ter em mente o conceito de Lógica Formal na fenomenologia e outros conceitos decorrentes deste modo de constituir a lógica, para entender o encaminhamento dado por HUSSERL à problemática levantada pelas *entidades imaginárias*.

Dois são os conceitos básicos que abrem a porta para que se possa penetrar na lógica husserliana. Um dos conceitos, nomeado de *Sachverhalten* (*Stand der Dinge* - estado da coisa), refere-se ao fato ocorrido, levando em conta a posição da coisa e sua situação em relação a outros objetos presentes. Todos estes elementos constituem uma constelação. No inglês, *Sachverhalten* é traduzido por *states of affairs*, *estados de acontecimento,* no português. Um exemplo de *estado de acontecimento* é a objetividade categorial, aquela que dá a noção de um determinado conjunto. O outro conceito, denominado *Sachlage*, traduzido por *situação de acontecimento*, denota as condições, tudo aquilo que determina o caráter de uma situação pré-categorial que é dada como uma *forma lógica,* uma estrutura formal particular. *Situação de acontecimento* é a *matéria-prima passiva* para que se constitua a constelação: o *estado de acontecimento*.

> Uma situação de acontecimento é algum tipo de núcleo de estados de acontecimentos equivalentes, embora nós precisemos resistir à tentação de fazer disto um substrato obtido de estados de acontecimento equivalentes. Estado de acontecimento pressupõe uma situação de acontecimento, não o contrário.[146]

---

[146] "A situation of affairs is some sort of common nucleus of equivalent states of affairs, although we mustt resist the temptation of making it into na *abstractum* obtained from equivalent states of affairs. States of affairs presuppose situação of affairs, not the opposite." SILVA, Jairo José. *Husserl's conception of Logic*. In manuscrito, Campinas: CLE/UNICAMP, 1999, p. 370.

Por exemplo, ao ser afirmado: João é maior do que Paulo e Paulo é menor do que João, as sentenças relatam dois e*stados de acontecimento* diferentes. Na primeira sentença, João é o foco, na segunda, Paulo é o foco. Porém, elas se originam da mesma *situação de acontecimento*, que não pode ser expressa com perfeição pelas sentenças, ou seja, pelas proposições. Por meio de proposições pode-se somente expressar os *estados de acontecimento*. Caso as sentenças fossem $J>P$ e $P<J$ onde J = medida da altura de João e P = medida da altura de Paulo, caberia a mesma análise.

Para HUSSERL, a lógica não poderia ficar indiferente ao fato de que proposições denotam *estados de acontecimento* antes que valor de verdade, assim como não mais poderia restringir sua tarefa às proposições, principalmente, quando a lógica é entendida como Teoria das Ciências. À Lógica, também, deve interessar os elementos da base, a *situação de acontecimento*, que constituem os *estados de acontecimento* e como os *estados de acontecimento* são produzidos a partir de *formas lógicas*. HUSSERL entendia que os objetos de interesse da Lógica são: os conceitos de objetos e tudo o que pode ser dito *a priori* sobre os conceitos.

Também faz parte da tarefa da Lógica husserliana o estudo de leis formais referentes a proposições e teorias, assim como seus *estados de acontecimento* e as *variedades* (alemão *Mannigfaltigkeit* – inglês *manifolds*).

Assim, a Lógica husserliana está dividida em duas regiões de inquérito. A primeira região referente à *lógica das proposições e teorias* que trata de objetos em níveis máximos de abstração, constituindo a lógica de proposições que foca as *categorias de sentido* como: conceito de nome, concepções. A segunda região, referente às *variedades* chamadas de *ontologias formais*, aquela que trata dos conceitos das *categorias de objetos* como: conceito de número, propriedades, relações, ordem, estados de acontecimento, etc.

Segundo SILVA, *ontologia formal* é o estudo de um sistema e de sua estrutura interna em termos das relações deriváveis, em domínios em que haja uma linguagem na qual a noema[147] é apresentada como um sistema de asserções. É importante compreender que esta divisão em regiões de inquérito

[147] Noema entendida como sendo o objeto intencionado.

não está associada a uma separação entre as noções de sintático e semântico, estas noções permeiam toda a Lógica husserliana.

As duas regiões podem ainda ser subdivididas em outros três níveis de objetivos a serem cumpridos. Na *lógica das proposições e teorias* tem-se 1) o *nível morfológico* que tem como tarefa: identificar as *categorias de sentido*, aquelas que são categorias básicas constituída de proposições significativas; estabilizar as leis formais que regulam a composição dos elementos das *categorias de sentido* para formar um complexo de proposições com sentido gramatical; 2) o *nível apofântico*[148] que tem como tarefa: garantir a validade objetiva das proposições e teorias; prever a inconsistência e garantir a unidade de sentido, ou seja, garantir a consistência; estabilizar as leis de transformação e as leis de derivação formal; 3) o *nível que trata das teorias de sistemas dedutivos* considerados somente sob a perspectiva da forma, ou seja, a teoria de possíveis formas de teorias. Supostamente aqui estaria incluído o estudo de propriedades de teorias, tal como a *completude*.

Na *ontologia formal* tem-se também três níveis de objetivo*s,* apenas há de se considerar uma mudança de foco das proposições para seu correlato *estados de acontecimento.* 1) o nível correlato ao *nível morfológico* que tem como tarefa: identificar as categorias básicas constituídas dos blocos formadores de possíveis *estados de acontecimento* objetivos e estabilizar as leis que regem a combinação destes blocos formando um complexo de *estados de acontecimento*; 2) o segundo nível é um correlato ao apofântico, sua tarefa é estabilizar as leis que permeiam a base das *categorias de objeto* e desenvolver suas teorias. Como exemplo temos a Aritmética, a Teoria dos Conjuntos; 3) o terceiro nível corresponde ao estudo das variedades. Sua tarefa é investigar as variedades e os correlatos objetivos dos sistemas axiomáticos formais não interpretados que são os axiomas de formas que

[148] Segundo Husserl "/.../, a teoria apofântica formal trata sempre de estabelecer uma doutrina formal "analítica" de significados "lógicos" ou significados predicativos "postos", levando em consideração pura e simplesmente as formas de sínteses analíticas ou predicativas e deixando, por tanto, indeterminado os fins significantes que entram nas formas". " Original: /.../ , la doutrina apofántica formal trata siempre de estabelecer uma doutrina formal "analítica" de significados "lógicos" o significados predicativos " puestos", tomando em consideración pura y simplemente las formas de síntesis analítica o predicativa y dejando, por lo tanto, indeterminados los términos significantes que entram em estas formas." MORA, José Ferreter. *Diccionario de Filosofía*. Tomo I –A-K. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.1971, p. 120.

caracterizam uma *teoria formal*. Como exemplo de estudo de variedades temos a Álgebra Abstrata, a Álgebra Universal, a Teoria dos Modelos.

> Esta inclusão da ontologia formal na lógica pode chegar a ser uma submissão completa de uma na outra. Dada a correlação estrita entre categorias de sentido e categorias de objetos, que induz a uma correspondência entre lógica das proposições e ontologia formal, nós podemos, como Husserl observou (Hua XXIV-pp.51-4), conceber o todo da lógica formal como ontologia formal.[149]

Uma vez que tenha sido feita uma descrição geral de aspectos da Lógica husserliana para assegurar a compreensão da solução apresentada por HUSSERL sobre os *imaginários* do ponto de vista do sistema de axiomas, será ainda necessário que se fixe a atenção nos meandros da *ontologia formal* e, principalmente, naquilo que diz respeito ao estudo das variedades.

Segundo SILVA,[150] o primeiro estudo sistemático de variedades matemáticas surge com Riemann Bernhard (1826 – 1866), em *On the Hypoteses which Lie at the Foundations of Geometry,* em 1854, onde é apresentado o conceito de variedade como uma generalização do conceito de espaço, da teoria das n-dimensões euclidianas e das variedades não-euclidianas. Este trabalho é fonte inspiradora de HUSSERL, conforme seu depoimento em *Prolegomena,* de 1900.

> /.../ o filósofo que conhece os princípios básicos da teoria de Riemann-Helmholtz pode conceber como as formas puras de teoria que dizem respeito a tipos, que apresentam diferenças marcantes, são unificados por uma lei.[151]

Quando o princípio de Riemann é considerado não só para entidades contínuas, aquelas referentes a espaços geométricos, mas também para

[149] "This inclusion of formal ontology into logic can go as far as be a complete submission of the latter to the former. Due to strict correlation between categories of meaning and categories of object, which induces a similar correspondence between the logic of propositions and formal ontology, we can, as Husserl noticed (Hua XXIV-pp.51-4), conceive the whole of pure formal logic as formal ontology". SILVA, Jairo José. *Husserl's conception of Logic*, *op. cit.*, p. 374.
[150] *Idem*, *ibidem*, p. 379.
[151] "/.../ , the philosofer who knows the first principles of the theory of Riemann-Helmholtz can conceive how the pure forms of theory which belong to types that present marked differences are united by a law." *Idem*, *ibidem*, p. 379.

coleções, sem que características substanciais como: cardinalidade, ser discreto e outras sejam mencionadas, porém considerando suas relações definidas e suas operações do ponto de vista formal, por meio de axiomas, pode-se ter o atual conceito de *estruturas* ao qual são adaptados os conceitos de *grupo*, *ideal*, *anel*, *corpo*, *espaço vetorial* etc. <u>Resumidamente, os axiomas formais denotam leis essenciais de existência presentes no conceito de estrutura que se adaptam ao objeto propriamente dito</u> [42 P1]. De acordo com as idéias acima apresentadas, a expressão *qualquer estrutura* não denota um domínio particular de estrutura de objetos específicos, mas sim uma forma, ou já um conceito, no domínio, denominado por HUSSERL de *variedade formal*. A relação entre a *variedade formal* e sua teoria é muito estreita. Uma *variedade formal* determinada por uma teoria formal não pode ser investigada independente desta teoria.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

> Uma teoria formal, é em um certo sentido, uma proposição formal complexa, e uma variedade formal é, em certo sentido, o *estado de acontecimento* formal complexo que esta proposição complexa denota.[152]

<u>Contudo, investigar uma variedade matemática, ou seja desenvolver sua teoria, significa derivar sistematicamente todas as conseqüências puramente formais dos axiomas que caracterizam esta *estrutura*</u> [21 P2].

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

O mérito da distinção entre variedade e teoria formal, apresentada por HUSSERL é que a distinção deixa nitidamente enfatizado que a teoria, formal ou não, refere-se sempre a objetos, pois os *estados de acontecimento* pressupõem *situação de acontecimento*. Portanto, o desenvolvimento da teoria, independente dos domínios de objetos descritos nesta teoria, não é uma tarefa exclusiva da Lógica Formal, pois este desenvolvimento precisa acontecer segundo diretrizes epistemológicas próprias das variedades. <u>Assim, a teoria da variedade, por exemplo a Teoria das Estruturas, tem que ser concebida como a teoria de</u>

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

[152] "A formal theory is, in a sense, a complex formal proposition, and a formal manifold is, in this sense, the complex formal state of affairs this complex proposition denotes." *Idem*, *ibidem*, p. 381.

todas as possíveis teorias formais que se referem às estruturas, no exemplo dado, a Teoria dos Grupos, a Teoria dos Anéis, a Teoria dos Corpos e suas relações, unificadas por alguma lei ou leis [43 P1]. Esta teoria toma a face de uma teoria dedutiva e precisa tornar-se uma teoria de sistemas dedutivos pondo-se em conexão com a lógica *das proposições e teorias*. Por exemplo, as teorias estruturais do século XX, citadas no início deste texto, que só puderam unificar parcialmente o conhecimento matemático, ou, na Álgebra Abstrata, a Teoria dos Corpos que pode ser derivada da Teoria Axiomática dos Números Reais.

A estreita relação entre a teoria de sistemas dedutivos e a teoria das variedades é uma conseqüência, segundo SILVA, do fato de que HUSSERL ainda pensava as variedades somente como um correlato objetivo de uma teoria formal dedutiva. Em outras palavras, o domínio formal era associado a um sistema axiomático formal de tal maneira que o domínio era constituído de todos os objetos formais que seriam *alguma coisa* definida em termos de operação e relação com outras *algumas coisas*, que pudessem ser justificadas por este sistema.

Isto significa que não seria possível considerar um objeto formal que não fosse singularizado por nenhum sistema, como o caso das *entidades imaginárias*, o *negativo*, o *irracional*, o *complexo*, que surgem à parte dos sistemas conhecidos. Isto faz com que HUSSERL, em 1901, apresente uma noção mais restrita de uma *variedade formal*, que eliminava a hipótese de ser o objeto necessariamente singularizado por um sistema, possibilitando um tratamento a objetos não totalmente admitidos por um sistema formal, sem no entanto abandonar totalmente a noção mais geral de variedades que se associava a um sistema axiomático formal.

Embora pareça contraditório o fato de HUSSERL admitir que a variedade estava intrinsecamente ligada à sua teoria, dado que ele também afirma ser de interesse da Lógica os elementos da base, esta foi a chave para solucionar tanto a questão epistemológica quanto a questão ontológica advinda dos *elementos imaginários*.

Em se tratando primeiramente do epistemológico, ele apresenta duas noções de completude que explicitam o estado de definição de um sistema, em alemão *die Definitheit,* em inglês *definiteness*: o *definido relativo (relative* *definiteness)* e o *definido absoluto (absolute definiteness)*. A noção de *definido absoluto* é idêntica à completude de HILBERT, aquela que quando qualquer questão sobre o sistema pudesse ser expressa na linguagem na qual o sistema é escrito e pudesse ser respondida pelo sistema.

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

Assim, uma variedade é *definida absoluta* quando sua teoria é sintaticamente completa [44 P1]. Esta noção envolve a idéia de máximo, a variedade formal como sendo o domínio de objetos formais determinados por um sistema axiomático formal [22 P2].

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

> Disto, a definição de *defiteness* de Husserl para variedades formais em *Ideas §72* pode somente ser lida como: uma variedade formal é definida quando qualquer sentença da linguagem de seu correspondente sistema formal for decidido nele, ou como uma conseqüência deste sistema ou como uma contradição a ele, além disto esta teoria formal é finitamente axiomatizável.[153]

SILVA adverte que, embora esta definição deixe subentendido que uma teoria possa ter um número infinito de axiomas, para HUSSERL uma teoria é sempre uma teoria finita e, a definição de *definido* apresentada em *Ideen* é a mesma que aparece em suas obras anteriores.

Nesse trabalho, HUSSERL abandona a idéia de que um sistema de axiomas possa definir os elementos de seu domínio formal objetivo e apresenta a noção de *completude* de uma estrutura, que segundo SILVA é um exemplo de *definido relativo*, estas teorias são definidas somente com respeito ao seu domínio formal. Portanto, os domínios podem ser definidos ao considerar-se a natureza essencial do domínio em questão por um número finito de conceitos e proposições, dos quais pode-se derivar todas as verdades deste domínio.

O *definido relativo* é um caso particular do *definido absoluto*, é um conjunto de expressões. Ele depende da noção de domínios de objetos formais determinados por um sistema de axiomas formal que definem uma variedade.

---

[153] "Hence, Husserl's definition of definiteness for formal manifolds in Ideas §72 can only be reads as follows: a formal manifolds is definite just when any sentence of the language of its corresponding formal system is decided in it, either as a consequence of this system

Entendendo que o domínio de um sistema formal é compreendido por HUSSERL, como sendo “a esfera de existência” definida pelo sistema, então o domínio não está limitado a objetos específicos, mas pode também se referir a objetos formais. A idéia central é que os objetos formais são estruturas de algum tipo que se transformam em objetos genuínos ou objetos específicos quando projetados numa condição apropriada de existência que lhes determina uma especificidade correlata à uma adequada substância. Os objetos formais são objetos insaturáveis no sentido de que eles amoldam-se à diversas condições apropriadas de existência e como objetos de uma linguagem formal eles denotam e singularizam o nuclear das condições.

O objeto formal, expresso em termos de um sistema de axiomas *A* pressupõe a existência de um domínio ontológico formal de *A* e a ele vai corresponder dois tipos de entidades lingüísticas: 1) termos sem variável expressas em *L(A)*, linguagem de *A*, e 2) fórmulas de *L(A)* com uma variável livre. O objeto formal x denotado pelo termo t é pensado como uma construção operacional que envolve o termo t, ou seja, $\exists! x\ (x = t)$. Qualquer fórmula f(x), com uma variável livre, que possa ser expressa na linguagem de *A* é uma definição implícita de um objeto formal e a descrição de um objeto pressuposto. Se o sistema *A* prova que $\exists! x\ f(x)$, lê-se: existe um único objeto que satisfaça f(x), o objeto especificado por f pertence ao domínio de *A*, neste caso pode-se acrescentar uma nova constante c à linguagem de *A* e um novo axioma $f(x) \leftrightarrow x = c$, com isto o objeto denotado por c pertence agora ao domínio de *A*. Porém para HUSSERL esta extensão não é completa pois os objetos formais são denotados por termos e singularizados por descrição, mas não podem ser reduzidos a termos e descrições.

> Eles são objetos formais precisamente porque eles constituem a forma às quais estes objetos específicos obedecem. Similarmente, o domínio formal que um sistema de axiomas determina não é simplesmente

Qual é o modo de ser das *estruturas da Álgebra?*

---

or as a contradiction to it, and moreover this formal theory is finitely axiomatizable.” *Idem*, *ibidem*, p. 389.

> uma coleção de nomes. Isto transcende a linguagem no sentido de que é uma forma genérica de regiões objetivas que este sistema descreve. [154] [45 P1]

SILVA resume a noção de *defiteness* husserliana da seguinte maneira: 1) nenhum sistema axiomático determina um único domínio de objetos formais puros ou formas de objeto. 2) Nenhum objeto formal pertence a este domínio caso não seja requerida a sua existência pelos axiomas do sistema. 3) Todos conceitos e operações envolvidos nos axiomas do sistema, e dos quais o significado é dado pelo sistema, são interpretados no domínio do sistema de tal modo que é possível dizer que todos os axiomas do sistema são verdadeiros no domínio.

Uma vez que HUSSERL tenha desenvolvido noções sobre domínio formal ou variedade, ele pode ocupar-se, mais diretamente, do problema que originou toda esta reflexão, as *entidades imaginárias*. Caso A e B sejam dois sistemas de axiomas tal que $A \subset B$, ou seja, o sistema B contém todos os axiomas de A e mais alguns axiomas consistentes porém não-deriváveis de A, pode o domínio de A ser mudado por B? Poderia B estender o domínio de A provando asserções na linguagem de A que A não pode provar? Estas questões referem-se às extensões e, como já foi comentado, os *elementos imaginários* do ponto de vista de A não existem, eles não pertencem ao domínio ontológico de A.

Porém, o sistema axiomático A determina também um domínio apofântico que é o conjunto de asserções que A pode determinar. Estas asserções podem ser verdadeiras ou falsas na base de axiomas de A, verdadeira caso seja provada pelo sistema, falsas caso a sua negação for provada.

Decorrente disto, surge uma outra maneira de introduzir as *entidades imaginárias* em A, que seria adicionando asserções na *L(A)*, na linguagem de A, que dizem respeito às entidades e obviamente não podem ser provadas ou negadas no domínio apofântico de A, pois estas entidades não existem em A. Isto mostra que o significado de uma asserção de *L(A)* não está determinado

[154] "They are formal objects precisaly because they constitute the form to which all these specific objects conform. Similarly, the formal domain that a sistem of axioms determines is not simply a colletion of names. It transcends language in the sense that it is the generic form of objective realms this system describes." SILVA, Jairo José. Husserl's two notions of completeness. In *Syntese*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 425.

para sempre, ele depende do sistema no qual a asserção possa ser provada. Em conseqüência disto, os símbolos estão abertos a interpretações advindas dos novos sistemas de axiomas e os sistemas devem garantir a significação [23 P2]. É esta tênue abertura própria dos símbolos no limite dos sistemas que justifica a introdução da noção de *definido relativo* solucionando os problemas epistemológicos postos pelo surgimento das entidades imaginárias.

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra–ser humano?*

À esta solução dada por HUSSERL ao propor o *definido relativo*, são intrínsecas duas questões que necessitam ser esclarecidas que são: quando é que a asserção introduzida no sistema tem sentido neste sistema? E quando é que uma asserção decide o limite do domínio de um sistema?

Uma vez que a asserção introduzida no sistema esteja na linguagem do sistema, ela sempre terá um sentido no sistema. O sentido manifesta-se na reinterpretação do significado dos símbolos que induz a extensão do sistema, pois um sistema não suporta duas interpretações para uma mesma asserção. Porém, até onde vai esta indução? Uma proposição decide o limite do sistema quando ela é uma conseqüência do sistema ou quando está em contradição com ele, no sentido de que a negação desta proposição é uma conseqüência do sistema. Posto isso, pode-se entender que um sistema de axiomas *A* está relativamente definido para seu domínio *D* se para qualquer proposição *P* em *L(A),* é P_D – a proposição *P* restrita ao domínio *D* que é supostamente um *estado de acontecimento* no domínio de *A* –, ou sua negação é uma conseqüência dos axiomas de *A*. Agora tem-se condições de legitimar as operações com as *entidades imaginárias*, dada a coerência da articulação posta em termos da linguagem de sistemas entre *domínio apofântico* que se refere a *estados de acontecimento* e *domínio ontológico* que se referem a *situações de acontecimento*, descrita por SILVA da seguinte maneira:

> Suponhamos que A e B sejam dois sistemas de axiomas consistentes, e que B estenda A. Suponhamos também que o domínio ontológico de B contenha propriamente o domínio ontológico de A, isto quer dizer, B contém elementos imaginários (da perspectiva de A). Se B prova a proposição P de L(A) então os elementos imaginários de B contribuem não somente com a prova de P, mas possibilitam também a mudança de significado do conceito que A implicitamente define – neste caso A não prova P. Mas se nós restringirmos

> todas as variáveis de P para o domínio D de A, então a proposição P_D assim obtida, refere-se exclusivamente à variedade formal que A determina, isto é, não existem referências implícitas aos elementos imaginários. Assim o conceito envolvido em P_D tem o sentido que A lhe dá; embora A precise decidir esta proposição.[155]

A título de exemplo, seja B o sistema dos complexos e A o sistema dos reais. O domínio ontológico de B é definido por

P : $\forall z, z \in D_B \leftrightarrow z = a + bi, a, b \in D_A$,

a restrição de P, P_{D_A}: $\forall z, z \in D_A \leftrightarrow z = a + bi, a \in D_A, b = 0$, como $bi = 0$, não existe referência aos elementos imaginários, permanecendo o sentido que o sistema A concede aos elementos de seu domínio.

Os *números complexos* como um domínio é um conjunto estruturado determinado por um sistema axiomático coerente, possuidor de uma teoria sintaticamente completa. Eles, quando projetados em domínios mais restritos, como domínios dos reais, dos inteiros, dos naturais, revelam-se em diferentes *estados de acontecimento numérico*, descritos por suas teorias como domínios apofânticos, de objetos formais insaturáveis, que podem assumir as mais variadas condições de existência que revelam *situações de acontecimento*.

O principal motivo dos estudos e das soluções apresentadas por HUSSERL refere-se às justificativas lógico-epistemológicas do raciocínio simbólico em geral. Uma teoria formal, determinada pelo *definido absoluto*, é vista como uma teoria de possíveis domínios objetivos, enquanto que uma teoria determinada pelo *definido relativo* não fornece um conhecimento, *a priori*, de todos os possíveis domínios de objetos que obedeçam a forma descrita por ela. Os domínios formais definidos por teorias formais são maximais com relação à inclusão, a eles não se pode mais adicionar novos símbolos.

---

[155] Suppose that A and B are two consistent systems of axioms, and that B extends A Suppose also that the ontological domais of B includes properly that of A, i. e., B has imaginary elements (from the perspective de A). If B proves a proposition P of L(A) then the imaginary elements of B contributed not only to the proof of P, but possibly also to changing the meaning of the concepts A implicitly defines – in which case A does not prove P. But if we restrict all the variables of P to the domain D of A, then the proposition P_D thus obtained refers exclusively to the formal manifold A determines, i. e., there is no implicit reference to imaginary elements. Hence the concepts involved in P_D have the sense A gives them; therefore A must decide this proposition." *Idem*, *ibidem*, p. 429.

Assim, HUSSERL estabelece uma clara relação entre sintática e semântica, pois um domínio formal é uma contraparte semântica de uma teoria formal. HUSSERL opta, em termos de uma filosofia da Matemática, por uma variante de formalismo na qual os *elementos imaginários* são vistos como meros instrumentos práticos, sem no entanto serem reduzidos a simples peças de um jogo que não têm relação com domínios substancialmente distintos.

> Para Husserl, /.../ os números são estruturas formais vazias de conteúdo específico que dão forma quantitativa a conjuntos arbitrários de objetos quaisquer."[156]

A teoria formal dos números descreve somente a estrutura formal subjacente a toda classe de domínios objetivos distintos, porém equivalentes. Dois são os caminhos apontados por HUSSERL para atingir-se um domínio formal. Ele pode ser intuído de um domínio material, mas também pode ser criado por teorias, desde que logicamente consistentes, pois as teorias referem-se sempre a algo que descrevem. A teoria formal é constituída do isomorfismo entre sistema conceitual e sistema simbólico. Por exemplo, o sistema numérico é isomorfo ao sistema conceitual de número, caso contrário os símbolos do sistema numérico não poderiam apresentar os números. O sistema de numeração, no todo de seus componentes, pensado como uma linguagem, revela sentidos numéricos e está aberto a interpretações em seus *estados de acontecimento* que correspondem a uma *situação de acontecimento*. Na proposta de Husserl, a Matemática simbólica é interpretada como uma ontologia formal. Nela os *elementos imaginários* são instrumentos próprios da linguagem numérica, um potencial passivo, cuja presença possibilita um pensar matemático estrutural [24 P2].

Como se dão as estruturas das presenças *estrutura da Álgebra– ser humano?*

[156] SILVA, Jairo José da. *Husserl e a Matemática Simbólica*. (*manuscrito*)

Capítulo IV

CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DAS CATEGORIAS ABERTAS

Essa etapa da pesquisa tem como finalidade construir e explicitar as *categorias abertas* que emergem do *texto-solo* construído ao colocar-se o movimento da construção/produção *das estruturas da Álgebra* em *epoché.*

A construção das *categorias abertas* se dá de forma analítico-hermenêutica em torno das perguntas e das respostas presentes no *texto-solo*. As perguntas indicarão os *invariantes estruturais* que compõem as respostas presentes no *texto-solo*. Os *invariantes estruturais* das respostas ao serem articulados constituirão as *categorias abertas*. Essa articulação tem a intenção de explicitar o estrutural da construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra.*

Estão implícitos na afirmação *as perguntas indicarão os invariantes estruturais* uma direção que é própria da índole da pergunta filosófica, o pano de fundo que legitima as perguntas e a maneira de lidar com o conteúdo das respostas.

Muitas das idéias que tecem as regiões que compõem essa afirmação foram explicitadas ao descrever-se a Hermenêutica Filosófica gadameriana, como aquelas que envolvem a pergunta filosófica e a maneira de lidar com as obras humanas vistas como tradição na perspectiva da temporalidade.

Nos capítulos anteriores foram tecidas considerações sobre o pano de fundo que legitima as perguntas P1 - *Qual é o modo de ser das estruturas da Álgebra?* P2 - *Como se dão as estruturas das presenças estrutura da Álgebra–ser humano?* e P3 - *Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das estruturas da Álgebra?* quando as *estruturas da Álgebra* são consideradas como uma tradição. Neste capítulo, serão retomadas idéias que estão presentes nesse pano de fundo, visando expor passagens da obra de HUSSERL que descortinam possibilidades para o apontar dos *invariantes estruturais* como também de tecer suas articulações.

Ao propor-se uma pesquisa em direção à *estrutura Apriori* no movimento do fluxo do *Apriori universal histórico*, efetua-se uma investigação a respeito da *formação da idealidade* desde o histórico presente até a sua apresentação primeira, que se dá na relação intencional homem-mundo. Esse modo investigativo sintetiza a longa trajetória teórica realizada por HUSSERL desde *Investigações Lógicas* até os textos que apareceram depois de sua morte em 1938. Suas obras são extensas e numerosas. Ao retomar-se, aqui, algumas idéias fenomenológicas que descrevem a jornada husserliana, segue-se o encadeamento proposto por MOURA[157], realizando-se recortes de seu texto com o objetivo de explicitar a investigação husserliana sobre Origem (Ursprung) em suas raízes e desenvolvimento.

Investigar a apresentação primeira da formação de uma *idealidade* quando espaço-temporalizada na relação intencional homem-mundo, no primero livro de *Idéias* está como busca do contexto em que ela recebe sua significação. Assim, investiga

> /.../, os eventos e as sínteses que estão na *origem* da apresentação à consciência de um "objeto", algo de "idêntico" através de uma multiplicidade de fenômenos (Husserl (1950, pp. 212-15). A investigação é portanto "jurídica" e o que se pergunta é como é possível algo assim como uma "subjetividade", quer dizer, uma instância encarregada de "fazer aparecer" objetos.[158]

Essa é uma análise estática porque explicita o "fazer aparecer" que se dá do objeto individual à multiplicidade dos atos intencionais. Essa análise, segundo MOURA, descreve uma *intencionalidade de ato* como se ela fosse independente da *intencionalidade de horizonte*, isto quer dizer que toma-se a consciência do objeto, como se ela já não tivesse como pressuposto a consciência de mundo. Embora nessa análise já estivesse presente a idéia de

---

[157] MOURA, Carlos Alberto de. *Sensibilidade e entendimento na fenomenologia*. Manuscrito – Revista Internacional de Filosofia. Husserl. editores Jairo José da Silva & Michael B. Wrigley. Vol. XXIII - Nº 2 - Outubro 2000.
[158] *Idem*, *ibidem*, p. 229.

que a consciência de um objeto é sempre mediada pelo *fenômeno* e que a percepção é dada em *perfis*.

Essas idéias ganham uma nova roupagem ao se compreender que *"a própria noção de fenômeno, de objeto no "como" de seu modo de ser dado, já designa uma "objetividade categorial". (Husserl (1987),pp.38 e 142)"*[159]. Isto quer dizer, por exemplo, que na percepção de um objeto vermelho, percebe-se não somente o vermelho do objeto, mas também a vermelhidão que define a categoria de cor vermelha. Abre-se, assim, a possibilidade desse objeto vermelho percebido poder ser relacionado com outros que se enquadram na mesma categoria de cor. Desta forma engloba-se o horizonte externo na análise da percepção.

> Afinal, a apreensão de um objeto como representado em diferentes "modos", em diferentes "perspectivas", é sua apreensão como estando "em relação" ora a este, ora àqueles objetos. Ela já é o objeto visado segundo diferentes formações categoriais.(*op. cit.* p. 77). A simples menção à noção de "fenômeno" já supõe um "apreender relacional", que é categorial mas antepredicativo. / ../ A consciência de um objeto que se "fenomenaliza", que está em distintas relações com outros objetos, supõe, por isso mesmo a consciência tácita de um "mundo", - a "intencionalidade de ato" supõe a "intencionalidade de horizonte".[160]

A *intencionalidade de horizonte* revela que os objetos não só são vistos sob diversas perspectivas mas em diferentes *modos de doação*, ora como objeto vermelho, ora como o vermelho do objeto, ora como a vermelhidão de todos os objetos vermelhos, revelando a idéia tácita da cor vermelha, e além disto, a percepção da categoria das cores em ato de percepção. Isto significa que a *presença* não se dá sem a mediação de um *modo de apresentação*. No ato da percepção tem-se os dois modos de doação, o objeto enquanto um individual e o objeto enquanto membro de uma categoria. A partir de então abandona-se a abstração da fenomenologia descritiva, como posta em *Investigações Lógicas*, que descrevia a *abstração sensível,* dada na perceção, como solo da *abstração não sensível*, aquela referente às categorias, e passa-

[159] *Idem*, *ibidem*, p. 230.

se a analisar as camadas de objetivação que compõem a tomada de consciência de mundo. Camadas essas assim categorizadas:

> (1) aquela dos objetos mundanos, situados no tempo objetivo; (2) a dos objetos "internos", como sensações e atos intencionais, que se desbobram em uma temporalidade imanente à consciência; (3) enfim, a esfera da consciência absoluta que constitui o próprio tempo, aquela graças à qual "aparece" um objeto enquanto temporal (Husserl (1966b), p. 73)[161]

Considerando que o movimento da objetivação se dá das *unidades* constituídas no tempo objetivo às multiplicidades constituintes, existentes em seus horizontes, é preciso perguntar como é possível a consciência de um objeto que *dura*. Essa é uma questão fundamental quando tem-se em mente explicitar a formação de uma *idealidade*, ou seja, de um objeto que *dura*, como duram as *estruturas da Álgebra*.

MOURA lança mão de uma metáfora para explicitar a *doação* de um objeto temporalmente distendido, que envolve diretamente a idéia de consciência do tempo. Ele toma a melodia como exemplo e afirma que a melodia ao doar-se envolve uma consciência do presente, mas também do passado e uma certa consciência do futuro.

O som da melodia é uma *unidade* em uma multiplicidade de fases temporais – a melodia *dura* – e se nós a apreendemos como som que *dura* é porque não temos apenas consciência de seu tempo presente, mas também de seus momentos passados "enquanto passado". HUSSERL afirma que se os momentos temporais fossem desconectados dos momentos temporais que os precedem, não seria possível a consciência de um objeto que *dura*, e que aquilo que está *por vir*, *a fortiori*, tornar-se-ia um mistério insondável.

Para ele, o fluxo do tempo se dá de tal forma que em cada momento presente o momento anterior escoa no passado, sem no entanto ser ultrapassado pelo novo presente. Ele permanece *quase como presente* à consciência, já sendo passado. Ocorre uma *modificação* no dar-se como

---

[160] *Idem*, *ibidem*, p. 231. Nota da autora: As palavras apreensão/apreender nos textos de HUSSERL têm o significado de compreensão/compreender e de percepção/perceber. Em seus textos aparecem as palavras: Erfassung/erfassen e Wahnehmung/Warhnehmen.
[161] *Idem*, *ibidem*, p. 232.

presença. O presente-passado doa-se em outra perspectiva que não aquela do *agora* e concomitantemente antecipa o *por vir* na forma de *perfis*. Esta é a denominada *estrutura do presente vivo*.

> Por isso Husserl insistirá em que este "presente vivo" é tecido por uma estrutura complexa, onde o "momento impresional do agora" sempre está acompanhado de sua "cauda de cometas" de retenção e por suas protensões, estas "intencionalidades originárias" que conservam no "agora" os "perfis" dos momentos passados e antecipam os "perfis" do futuro, momentos que por princípio nunca são "partes reais" do presente (Husserl (1966b), p.31).[162]

Na análise husserliana o *presente vivo* refere-se a um *tempo* que também é *histórico* por tratar-se de uma reflexão que se dirige não às coisas, mas aos seus *modos de doação*. Na trama das *retenções* e das *protensões* é tecido o *objeto temporal* como uma unidade da multiplicidade de fases temporais presentes, passadas e futuras.

> Mais geralmente, "a operação constitutiva da impressão originária e aquela da continuidade das retenções que a modifica continuamente, assim como aquela das protensões, formam uma só operação indivisível" (p.325). O fluir dos "fenômenos" do objeto temporal, o fluxo das retenções onde ele nos é dado a cada vez em um "como" diferente, em um novo perfil, forma uma "unidade incindível" (untrennbar Einheit) que nunca pode ser dividida em "pedaços" que existiriam "para si" (Husserl (199b,p.364). É apenas porque a temporalidade é assim tecida que se pode falar em uma "estrutura" e em uma gênese essencial da consciência.[163]

Ao tomar-se consciência de um *objeto temporal* tem-se a presença de uma fase do objeto, o momento impressional do *agora,* que comporta a "cauda do cometa" das retenções que faz com que as fases passadas estejam presentes à fase atual por meio de uma série sucessiva de *perfis*. *Perfis* que são os componentes - *a priori sintético* - de um *sistema de reenvio* que se correlacionam da mesma forma que o condicionado se relaciona à condição.

---

[162] *Idem*, *ibidem*, p. 234
[163] *Idem*, *ibidem*, p. 242

> O "agora" não é um tempo curto, um átomo temporal, mas sim um "limite ideal", algo de "abstrato" que não pode ser nada "para si" (Husserl (1966b), p. 40). Sendo o limite ideal das intencionalidades retencionais e protencionais que tendem para ele, o "agora" não é nada que se possa fixar, ele só se desvela a si mesmo como agora quando deixa de ser agora, ele só tem sentido para e pela retenção, ele só é apreendido enquanto passado. Desde então, o objeto imanente no seu agora nunca é dado ele mesmo, mas apenas visado através de seu rastro fenomenal, ele só é dado quando passado, como a unidade sintética de uma multiplicidade de perfis.[164]

Neste modo de entender o tempo tem-se que a consciência que constitui o tempo é o lugar originário onde dá-se a doação dos objetos como *fenômenos,* e que estará nela mesma o princípio da unificação destes *fenômenos* em *objeto*.

Uma vez exposto o pano de fundo contituído pelas idéias fenomenológicas que dão sustentação às perguntas para indicar os *invariantes estruturais* que compõem suas respostas, passa-se, então, a analisá-las pontuando e articulando *os invariantes estruturais* que tecem os *perfis* e construindo-se assim as três Categorias Abertas dessa tese: os modos de doação das estruturas da Álgebra, as estruturas das presenças – estrutura da Álgebra-ser Humano e o modo de ser matemático do ser humano.

A construção das categorias deve mostrar como a constituição de sentido das *estruturas da Álgebra* se realiza no *sistema de reenvio* visto como um processo que se desdobra em etapas separadas, mas que por meio dele pode-se vislumbrar uma unidade.

Nos textos que explicitam as *categorias abertas*, as referências às perguntas e respostas serão feitas utilizando-se os códigos indicados no final dos trechos evidenciados no *texto-solo*. Por exemplo: [2 P1], onde P1 se refere à pergunta *Qual é o modo de ser das estruturas da álgebra?* e o número 2 refere-se à resposta a esta pergunta evidenciada no *texto-solo*, em [3 P2] P2 refere-se a pergunta *Como se dá as estruturas das presenças estrutura da Álgebra – ser humano?* e em [5 P3] P3 refere-se á pergunta *Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das estruturas*

---

[164] *Idem*, *ibidem*, p. 238.

da Álgebra? A numeração das respostas de cada pergunta é sequencial, para facilitar a busca caso seja necessário.

1. OS MODOS DE DOAÇÃO DAS ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA

A análise das respostas que compõem essa categoria será realizada, levando-se em conta o *objeto temporal, estruturas da Álgebra,* em termos dos tempos objetivos de sua construção/produção definidos nos *agoras* e em termos do *presente vivo*

1.1. NA PERSPECTIVA DOS *AGORAS*: INVARIANTES ESTRUTURAIS

> É no presente vivo que ocorre a primeira dissociação entre objeto e o seu modo de manifestação, o nascimento originário da "fenomenalização".
>
> Carlos Alberto Ribeiro de Moura

Ao realizar-se o movimento da análise hermenêutica das respostas à pergunta *Qual é o modo de ser das estruturas da Álgebra?* na perspectiva dos *agoras* delineados pelos trabalhos dos matemáticos descritos no *texto-solo*, vê-se que as *estruturas da Álgebra* sofrem modificações durante a construção/produção de seu conhecimento. Essas modificações são expressas em torno de *invariantes estruturais* que compõem o seus diferentes *modos de doação*.

Nos trabalhos de GALOIS e DEDEKIND, as *estruturas da Álgebra* se apresentam como *noções estruturais* que têm uma finalidade instrumental [30 P1], [37 P1], [38 P1]. As *noções estruturais* apresentam-se como *recursos* para estudar propriedades de objetos matemáticos conhecidos [29 P1], para articular princípios genuínos, princípios próprios do campo da Aritmética [36

P1], e ainda como *recurso* na busca de novos métodos de resolução das equações.

Como um *recurso* que expressa e articula propriedades e princípios, como por exemplo; na decomposição das raízes de uma equação em termos de seus coeficientes [40 P1], as *estruturas da álgebra* apresentam uma característica que está sendo compreendida como *delineadora de fronteiras*. Isto também ocorre ao definir-se em termos de propriedades um campo numérico como o dos hipercomplexos [36 P1] e ao determinar uma circunstância numérica específica, como por exemplo, a definição dos reais [31 P1] ou a dos *números algébricos*, dos quais as fórmulas anunciam raízes de equação, ou seja, números que têm a propriedade de anular a expressão algébrica [32 P1].

Ao mesmo tempo que as *estruturas da Álgebra* delineam fronteiras, elas são assumidas pelos matemáticos em sua característica *integradora* mediada por princípios operacionais, que unem as regiões determinadas pelas fronteiras. Elas mostram ser constituídas por uma característica *integradora relacional*, exemplificada na demonstração de que todos os *números algébricos*, pensados como núcleos numéricos, satisfazem as mesmas propriedades operacionais, constituindo-se a noção de *corpo* [33 P1]. Passa-se da noção de conjunto caracterizado por propriedades numéricas, para no*ção de estruturas* caracterizadas pelas propriedades operacionais.

A característica *integradora relacional* das *estruturas da álgebra* ao unificar determinadas regiões no campo numérico, quer seja por princípios, como o da fatoração [34 P1], por propriedades, por lei de formação ou pela relação de inclusão presente nas definições de diferentes tipos de noções estruturais [35 P1], revelam uma alteração no campo da Álgebra que é interpretada por WUSSING como uma reorientação da Matemática [39 P1] que possibilita o começo do pensamento estrutural. Essa interpretação deixa margens para que se pense a Matemática como mudando nesse momento enquanto ciência. Metaforicamente, como se ela fosse um veleiro que por mudar a direção de sua rota, tornar-se-ia uma outra embarcação.

Porém, essa alteração ocorrida no campo da Álgebra, quando analisada sob o prisma fenomenológico que descreve os *modos de doação* do *objeto temporal*, denota um outro modo de os números se apresentarem. Os números dão-se de outra maneira do que aquela da contagem, do cálculo, da medida. Os números dão-se mediados pelos seus estruturantes, pelo que os constituem enquanto números ou números de uma determinada classe numérica. É o mesmo processo de compreensão da vermelhidão do vermelho que coloca o objeto vermelho na relação com outros objetos vermelhos.

A percepção dos objetos enquanto conjunto, da pluralidade enquanto unidade se dá na esfera antepredicativa e é tomada como possível pela síntese da consciência interna do tempo. Segundo MOURA

> /../ pluralidade de indivíduos precisa ser dada originalmente *na* e *com* a forma de uma "duração temporal englobante", que justamente torna possível esta unidade."[165]

Pode-se assim compreender que o experenciar dos determinantes de um todo, como por exemplo as propriedades e princípios essencias, é um constituir de uma unidade e que os determinantes dão-se de forma articulada entre si, e que são apreendidos como pertencentes a esse todo, numa relação ôntica[166].

Em outras palavras, não se tem consciência das propriedades como algo independente do todo, embora as propriedades se apresentem de maneira diferente do todo. Ao compreendê-las *na* e *com* a forma de uma duração dá-se a percepção do ato de conhecer o todo através delas. O todo, no universo da Matemática, enquanto conjunto, tem como determinante as características, ou propriedades dos elementos e enquanto pluralidade as relações e leis operacionais.

As *noções estruturais,* aqui exemplificadas, denotam o *nascimento originário da fenomenalização* das *estruturas da Álgebra* no âmbito do campo número, exemplificados nos trabalhos de GALOIS e DEDEKIND.

Seguindo o caminho da compreensão do *objeto temporal* e tendo como mapa o *texto-solo* construído nessa tese, percebe-se uma modificação da apresentação das *estruturas da Álgebra.* Elas se dão como um *objeto de estudo* da Álgebra nos trabalhos que têm como foco os tipos de uma única

---

[165] *Idem*, *ibidem*, p. 246.
[166] Ôntico: Se refere ao ente, ao seu modo objetivamente natural de estar no mundo. Segundo BICUDO em sessão de orientação.

estrutura, exemplificados no *texto-solo* nos estudos sobre *corpos* realizados por STEINITZ.

Um fato significativo acontece entre as *noções estruturais* e a teorização de uma *estrutura da Álgebra* enquanto um *objeto de estudo*. Dá-se uma inversão. As propriedades e leis que delineam a estrutura, gerando as *noções estruturais*, são tomadas como axiomas que podem ser articulados por um sistema lógico [25 P1] e [26 P1]. Isto mostra a característica *integradora relacional* das *estruturas da Álgebra* extrapolando o território até então ocupado por elas. É a Álgebra adentrando o território da Lógica Formal.

A apresentação das *estruturas da Álgebra* como um *objeto de estudo*, absorve essa inversão, porém conserva a relação ôntica com a região numérica, pois a *característica* do *corpo* permanece vinculada às dos números, denotando suas leis essencias como axiomas [42 P1], deixando à mostra um novo *modo de doação* das *estruturas da Álgebra*. Isto é realizado de tal forma, que o trabalho de STEINIZ é considerado como o fim da axiomatização da Álgebra Clássica [24 P1].

As *estruturas da Álgebra* como *objeto de estudo* têm a finalidade de reunir todos os tipos de *corpos* [22 P1] numéricos. A sua característica *integradora relacional* tem como instrumento central a *característica* do corpo e de sua extensão. A extensão é expressa em termos da relação de inclusão, que busca estruturas "menores" do mesmo tipo que as estruturas "maiores" em analogia com as relações de estruturas de tipos diferentes realizada por WEBER [28 P1], no sentido de delinear o *corpo mínimo* que quando extendido por um número limitado de vezes, pudesse delimitar o *corpo máximal*. Isto indica a característica *delineadora de fronteiras* das *estruturas da Álgebra* [23 P1] agora não mais no domínio dos números propriamente, mas dando-se no domínio de estruturas [27 P1], podendo-se então, definir a fronteira de um conjunto numérica em termos de uma extensão maximal. As *estruturas da Álgebra* tornam-se, assim, um *recurso* definidor de fronteiras, suprindo as irracionalidades que vão se fazendo presentes no campo numérico [41 P1] conforme descrito anteriormente. Essa apresentação das *estruturas da Álgebra* presentifica a sua característica de poder ser uma *variedade matemática* absoluta por estar sustentada por uma teoria sintaticamente completa [44 P1].

Construída essa etapa da objetivação na construção/produção das *estruturas da Álgebra* que teoriza cada uma das suas *estruturas* vislumbra-se a possibilidade de um novo nível de relacionamento, agora entre as variedades. Assim, as *estruturas da Álgebra* tornam-se *tema* da Álgebra. Esse salto de objetivação pode ser visto nos trabalhos de NOETHER.

A apresentação das *estruturas da Álgebra* como *tema* da Álgebra tem a finalidade de unificar as espécies de estruturas em torno de um princípio que lhes fossem genuíno e essencial. Isto mostra sua característica de *integradora relacional* [17 P1]. Esse princípio é o da unicidade da fatoração em anéis que origina uma Teoria Multiplicativa de Ideais [19 P1]. Essa apresentação teórica, fundada nas circunstâncias numéricas, subsidia a formalização da Álgebra como espécies de Álgebras [18 P1], como uma teoria de variedades. Essa teoria é concebida como uma teoria que abrange todas as teorias de uma única estrutura [43 P1]. Isto deixa transparecer o caráter das *estruturas da Álgebra* de serem *recurso,* pois através delas pode-se transferir princípios de um domínio estrutural para outro [20 P1], [21 P1] abrindo a possibilidade de um outro nível de objetivação que trata do nuclear das relações. Concomitantemente, estabelece-se o limite da formalização do domínio numérico. O caráter de *delineador de fronteiras* das *estruturas da Álgebra* mostra-se agora como sendo um divisor de regiões matemáticas teorizavéis. Os objetos formais dessas teorias constituem a forma que é composta pelos componentes essencias dos objetos específicos da região teorizada [45 P1] e que conserva uma relação ôntico/ontológica[167] com eles.

A apresentação das estruturas da Álgebra no trabalho de VAN DER WAERDEN, deixa vir à tona o seu caráter de *recurso* no seu mais alto nível de objetivação no campo da Álgebra que é o de se tornar um *método algébrico*. Sua finalidade é a de compilar o conhecimento algébrico até então desenvolvido segundo a abordagem estrutural [11 P1], já construída. Os *invariantes estruturais* descritos nos trabalhos anteriores, conforme as respostas do *texto-solo*, se conservam [12 P1], [13 P1], [14 P1], [15 P1] e [16 P1] embora sejam apresentados de forma hierarquicamente axiomática.

---

[167] Ôntico: Se refere ao ente, ao seu modo objetivamente natural de estar no mundo. Ontológico: abertura à compreensão do ser ente. Segundo BICUDO em sessão de orientação.

O modo de se doar das *estruturas da Álgebra* na Matemática ocidental, pode ser pensado como sendo o seu *por vir*. Ali, ela se torna *tema* da Matemática [2 P1] e tem como finalidade prover uma fundamentação para todo conhecimento matemático [1 P1] e [7 P1], conservando a expectativa de seu caráter *integrador relacional* expressa em termos de conceitos [3 P1], [4 P1], [9 P1], de características das relações e da linguagem [5 P1], [6 P1] ou ainda como transmissão de princípios ou estratégias utilizadas no desenvolvimento das *estruturas da Álgebra* [7 P1], [8 P1]. Pela abordagem estrutural a Matemática ganha espaços aplicativos que transferem a idéia de estrutura matemática para outras regiões de inquérito [10 P1].

1.2. NA PERSPECTIVA DO PRESENTE VIVO: O SISTEMA DE REENVIO

> Se o sistema de reenvios que está na origem da experiência é costurado pelo *"a priori sintético"*, este *a priori* é aquele que se descobre na consciência constituinte do tempo.
>
> Carlos Alberto Ribeiro de Moura

Da análise das respostas à pergunta *Qual é o modo de ser das estruturas da Álgebra?* na perspectiva dos *agoras* compreende-se os modos de doar-se das *estruturas da Álgebra* que se expressam em seus *invariantes estruturais* como *integrador relacional*, *delineador de fronteiras* e de ser r*ecurso* que se dão entrelaçados às *finalidades* de sua construção nas fases temporais de *agoras e* de *agoras-passados*. Esse entrelaçamento é constituído pelas características do *agora* e pelo rastro de modificações deixadas ao longo do tempo que expressam a *maduração* das conquistas matemáticas. Tecer uma unidade da multiplicidade de fases temporais é tecer a análise na perspectiva do *presente vivo*.

Falar *das estruturas da Álgebra* como sujeito a um processo de *maduração* é assumí-lo em seu modo de ser enquanto um ser que *é* e que se constitui no *ir sendo ao dar-se*. O *ir sendo ao dar-se* descreve a formação desta *idealidade* não como um conteúdo que se renova, se modifica e se transmite por uma força vital própria, mas como constructo que se constitui no fluir de intencionalidades, de opiniões formadas que não devem ser vistas somente no individual, mas também no todo de sua construção/produção e no tempo histórico. Um todo que contemple o conteúdo, a validação deste conteúdo e a validade de ser do modo de validação, que descrevem o seu modo originário de ser e o modo da Modulação a que pertence. A Modulação revela o *ir sendo* do mundo, como algo validado em nossas vidas, ou seja, com seu sentido ôntico espaço-temporal de mundo real.

No caso específico do conteúdo estudado nesta tese, a Modulação é entendida como a ciência Matemática e o modo da Modulação como sendo o modo estrutural da cultura ocidental de construir/produzir essa ciência.

Por tratar-se aqui de um conteúdo que já é conhecido no presente atual, ele será explicitado na certeza de um *ver claro* que o produziu, pois ele está sendo dado como constructo-passado validado no fluxo do tempo e consolidado no fluxo de *maduração*, mostrando-se como um presente em fluxo, permanente e presente. Essa permanência mostra que as *estruturas da Álgebra* estão em concordância com o *ir sendo* do mundo e com o significado da Matemática para a *práxis* que se destina.

A *práxis* se dá, em primeira análise, no âmbito pessoal e está ligada à *comprovações* do vivido. Somente pela *práxis* pode-se realizar e confirmar algo. Mesmo que a *comprovação* seja para satisfazer um único indivíduo, aquele que intuiu.

Para HUSSERL, as *comprovações* são *sínteses identificadoras* do que foi apresentado de antemão como um *por vir*, em ato de percepção. Uma vez que o *por vir* mostre-se "ser real" ou "ser assim" na *práxis* isso permanece no fluxo da vida.

Por outro lado, estamos relacionados com o *ir sendo* do mundo e com o seu horizonte de possibilidades. O mundo é, portanto, uma possibilidade de experiências, não só para novas apresentações mas também para novas concordâncias. Uma das bases que faz a amarração de sentido de experiência e concordância é a *finalidade*.

> Finalidades são finalidades para a experiência de mundo (no mínimo, necessárias no nível mais baixo). Elas mostram por um lado o sistema do juízo prático, e por outro lado um modo próprio de ir sendo, não ir sendo de mera experiência, mas ir sendo de aspiração (Zielung) prática. Uma finalidade é ir sendo, é identificável, tem seus modos de dar-se subjetivos, que são identificáveis, e finalidade como ir sendo penetra na corrente de experiência como ato do querer – vivenciável.[168]

Conforme foi constatado na análise das *estruturas da Álgebra* tomada como um *objeto temporal,* as *finalidades* internas do corpo do conhecimento matemático modificam-se a cada fase temporal apresentada, deixando à mostra o seu *ir sendo* em torno dos *invariantes estruturais* que revelam as características de *integrador relacional*, *delineador de fronteiras* e de ser r*ecurso,* próprias das estruturas. Esses *invariantes* modificam-se segundo a *finalidade*, formando uma unidade de fluxo que mantém em suas temporalizações uma correlação entre as fases como aquela do condicionado com a condição.

As *finalidades* apontadas no *texto-solo* encontram-se claramente relacionadas com a *práxis* pessoal de matemáticos, impulsionados pelos seus quereres, buscando *comprovações* para o *por vir*, posto nas *finalidades*, em concordância com o já validado por outras *finalidades*, construindo um fluxo coerente de *comprovações* que transmitem sentido da experiência.

As *estruturas da Álgebra* quando analisadas na perspectiva husserliana conservam o seu sentido no mais íntimo das ações humanas. As *estruturas* são reveladoras de movimentos vitais em torno de *invariantes* entrelaçados com uma *práxis* teórica.

> Toda práxis, também a teórica, pressupõe o fluxo apodídico e imutável em seu estilo e o mundo ingênuo validado. Toda

---

[168] Zwecke sind Zwecke für die Erfahrungswelt (mindestens in unterster Stufe notwendig). Sie bezeichnen auf seiten des Ich das System der praktischen Gerichtetheiten, andersseits eine eigene Art von Seienden, nicht Seienden aus blosser Erfharung, sondern seiend aus praktischer Zielung. Auch ein Zweck ist Seiendes, ist Identifizierbares, hat seine subjektiven Gegebenheitsweisen, die selbst identifizierbar sind, und Zwecksetzung tritt im Erlebnisstrom zwar als Willensakt auf – eslebnismässig -/../ HUSSERL, Edmund. *Schichten des Weltbewusstsein* (13. Juni 1936). Ergänzungsband texte aus dem nachlass. *In* die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendentale Phänomenologie. Band XXIX. Husserliana. Dordrecht/Boston/london: Kluwer Academic publishers, [s/d]. p. 256.

> opinião de mundo pressupõe a estrutura apodídica do fluxo e o mundo ingênuo validado nele como solo.[169]

O próprio apodídico é também uma forma de validação que mantém o sentido de ser da forma ôntica de mundo

> "como um núcleo, um campo de mundo explícito, acordado e apresentável da atual unanimidade, com a potência de se repetir. Esse é o núcleo, um horizonte de aperfeiçoamento de modificações através da modulação de qualquer tipo."[170]

A *unidade* da Modulação se forma do incompleto em direção ao seu aperfeiçoamento. As mudanças se dão de forma gradual, como conhecimento do *vir a ser* da mesma coisa. Os *agoras* da Modulação Matemática são momentos de *superação*. Eles doam-se como um núcleo de unanimidade continuada – para o horizonte de possíveis modos da Modulação, e que sempre são relacionadas apodidicamente ao já habitual e à unanimidade contínua.

Com isto, pode-se afirmar que as *finalidades,* enquanto expressões do *por vir* das *estruturas da Álgebra,* são determinantes do modo de doar-se dos *invariantes estruturais* da *práxis teórica*. São elas que direcionam a construção/produção das *estruturas da Álgebra* ao articular o sentido da experiência e as concordâncias até então estabelecidas.

Experiências e concordâncias que se mostram no filão do conhecimento matemático exposto no *texto-solo* sobre a construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra,* relacionados ao sentido de número, apresentados em *modos de doação* como propriedades, princípios essenciais e que são conservados nos modos de validação/comprovação efetuados pelos matemáticos ao se inspirarem no trabalho de seus antecessores. Como o fez NOETHER ao buscar artifícios validados no campo numérico realizados por

---

[169] Alle praxis, auch die theoretiche, setzt den apodiktisch in seinem Stil unverändlichen Strom und die naiv-geltende Welt voraus. Jede auf Welt bezügliche meinung setz die apodiktische Struktur des Stromes voraus und die in ihm demgemäss naiv-geltende welt: als boden. *Idem*, *ibdem*, p 266.

[170] /.../ als Kern ein anschauliches und geweckt vorstelliges Weltfeld der aktuellen Einstimmigkeit und mit potentierller Wiederholbarkeit. Diese ist der Kern einen Horizont der Vervollkommeung der Wandlung durch modalisierung jeder Art. *Idem*, *ibdem*, p. 264.

DEDEKIND, para explicitar validações no campo das *estruturas da Álgebra*, constituindo o seu fluxo de *maduração*.

2. AS ESTRUTURAS DAS PRESENÇAS – ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA-SER HUMANO

Dada a intrínsica correlação entre *finalidades*, *modos de doar-se* e *temporalização*, conserva-se na análise da categoria *As estrutura das presenças – estrutura da Álgebra-ser humano* a perspectiva dos *agoras* delineados na categoria de modos de doação das estruturas da Álgebra que descrevem as estruturas como *noções estruturais, como objeto de estudo, como tema e como método* e, posteriormente, na perspectiva do *presente vivo.*

Essa categoria constitui-se em torno das respostas à pergunta: *como se dão as estruturas das presenças das estruturas da Álgebra e do ser humano?* A análise a ser aqui realizada busca compreender as *sínteses a priori,* o *Apriori estrutural* posto no mundo e as funções intencionais que constituem as *sínteses de identidade* das *estruturas da Álgebra* nos *agoras* levando em conta as retenções e protensões temporais, assim como também a *síntese de identidade total do objeto* - o *Apriori universal histórico*. Essa análise contempla as sínteses do discreto e do contínuo, no ato de percepção, no *Apriori estrutural*, assim como também no *presente vivo* no *Apriori universal histórico*.

2.1. NA PERSPECTIVA DOS *AGORAS*: APRIORI ESTRUTURAL

A análise na perspectiva dos *agora* se coloca como possível no ato de percepção porque na passagem do objeto para sua propriedade não há mudança de tema. O objeto permanece no foco intencional. Assim quando o ser humano passa da consideração do objeto à compreensão da propriedade

> /.../ se o objeto não está mais "dado" na sua intencionalidade atual, ele permanece todavia "retido" e assim "quase presente" à consciência. Graças a isso, o "objeto total" permanece sempre aquilo que este eu apreende. O *ego* está continuamente dirigido a esta apreensão total do objeto, e as apreensões parciais das propriedades se recolhem com a apreensão total, de tal maneira que através de cada apreensão parcial nós apreendemos o "todo", na medida em que no recolhimento ele "ultrapassa" a propriedade apreendida e existe para a consciência nesse próprio ultrapassamento. E a cada momento, pelo mesmo processo da retenção, a propriedade é incorporada ao substrato, quando se passa para a apreensão de uma outra propriedade. (*op. cit.*, p. 13) [171]

Vê-se, assim na citação de HUSSERL, explicitada a percepção de um objeto e de suas propriedades, como uma constituição de sentido que é uma compreensão articulada em termos de retenções e protensões, do visível ao invisível, constituindo a unidade da percepção que ocorre no pré-reflexivo. Essa compreensão é também *estar em relação* e designa uma objetividade categorial, portanto, percepção de *conjunto*.

Nesta perspectiva da percepção de *conjunto* pode-se compreender o trabalho de DEDEKIND, ao tomar as propriedade numéricas já conhecidas e transformá-las em definição [15 P2], [16 P2], assim como também o trabalho de GALOIS ao agrupar as raízes de uma equação em termos de permutação de seus coeficientes [18 P2], como um trabalho que tem seu primado no ato da percepção de conjunto, que é intuição enquanto aponta para um *por vir* e se relaciona com o horizonte de futuro.

> Uma pluralidade de indivíduos só pode estar presente a uma consciência "em conjunto" e na "unidade de uma intuição", se uma temporalidade originária envolve esta pluralidade em uma unidade, segundo os modos do simultâneo e do sucessivo. (Husserl (1954), p. 182).[172]

Segundo MOURA, os indivíduos ao doarem-se como pluralidade constituem uma *unidade sensível* em torno da *forma sensível originária* - os *invariantes estruturais*, porque a temporalização tem as funções de apresentar indivíduos e de uni-los em uma *unidade de conexão*.

---

[171] Cit por MOURA, Carlos Alberto de. *Sensibilidade e entendimento na fenomenologia*. *Op. cit.,* p. 246.
[172] *Idem, ibidem*, p. 246.

DEDEKIND toma as propriedades numéricas como determinantes do conjunto numérico e dá início a uma maneira particular de definir e de referir-se aos objetos matemáticos, fazendo surgir *noções estruturais* que tinham como *finalidade* compreender os números em uma fundamentação puramente aritmética [14 P2], [19 P2] e [20 P2] ou como uma livre criação por meio das leis operacionais que os unem [15 P2]. Por outro, GALOIS, percebe permutações nos arranjos dos coeficientes da equação, introduzindo um novo método de resolução de equações.

> Na clareza, o surgimento do dar-se explícito é o mesmo que *dar-se* em seu modo de doação. E os modos de dar-se são modos de maturação originária: modo originário do que está à mão, presentação, recordação como dar-se de ter sido, esperança como ver claro, ver antes, dar-se antes como compreensão, compreender um dado como ele próprio. [173]

Da análise fenomenológica da percepção pode-se compreender a estreita ligação que há entre os modos de doar-se e o modo da *maduração* originária. Aí está implícita uma identificação do *ser* em seu *ir sendo*, do *ir sendo* ao *dar-se* em suas formas visíveis ou invisíveis, explícitas ou implícitas, do *ser* em seu *ir sendo* compreendido. Essa identificação é bastante evidente entre alguns sistemas simbólicos e seus sistemas conceituais. Como por exemplo: os conceitos musicais e seu sistema de notação ou o sistema conceitual de número e do sistema de numeração [24 P2] que apresenta os números em uma *unidade de conexão*. Os símbolos numéricos, enquanto articulados em torno do sentido de número podem ser pensados como apresentação dos números em seus modos de doação: enquanto número e enquanto conjunto, um todo numérico articulado em torno das propriedades numéricas ou relações numéricas. O sistema numérico como uma construção da Modulação Matemática de mundo, *vai sendo* e no *ir sendo* doa-se como Apriori estrutural, como *a priori sintético* das *noções estruturais* [17 P2], [15 P2]. As

---

[173] In der Anschaulichkeit die Ursprünglichkeit der selbstgebung-anschaulich gleich selbstgeben in ihren Modis der Selbstgebung. Und Modi der Selbstgung sind Modos der ursprünglichen Zeitigung: Urmodus Gegenwärtigung, Präsentation, Widererinneg als Sebstgebung von vergangenem Seiendem, Erwartung als Anschauung, Vor-Anchauung, sebstgebung als im voraus Erfassen, Vor-Erfassen von einem Gegenatändlichen als es selbst. HUSSERL, Edmund. *Schichten des Weltbewusstsein* (13. Juni 1936). Ergänzungsband texte aus dem nachlass. *Op. cit.*, p. 248.

noções estruturais por sua vez vão dando lugar à *conceitos estruturais* como *o conceito de corpo*, que ao ser tratado como objeto da Álgebra mostra-se como objetos de uma prática teórica formal [21 P2] que busca explicitá-lo como um conjunto de *corpos* reunidos em torno de características e por extensões algébricas [9 P2], [10P2], [11 P2], realizadas em um número finito de vezes, fazendo surgir o conjunto máximal de números em termos de uma propriedade.

Com isto, constrói-se um todo do *objeto ideal* número, originando o conceito de variedade formal - em termos de *estruturas da Álgebra* - expressa por um sistema axiomático [12 P2], [22 P2]. Segundo a análise fenomenológica esse sistema axiomático deve ser composto de leis essenciais expressas em linguagem axiomática, cujos os símbolos adquirem sua significação plena ao ter-se o sistema sintaticamente definido [23 P2].

O *por vir* na temporalização das *estruturas da Álgebra* explicitadas como teorias de uma estrutura como: a *Teoria dos Corpos*, a *Teoria dos Grupos*, a *Teoria dos Anéis* é dado na *Teoria das Estruturas* vislumbrada por NOETHER. Essa teoria é concebida como uma teoria que unifica, por leis essenciais, todas as teorias de uma *estrutura* e suas possíveis relações [4 P2], tornando as *estruturas* o *tema* da Álgebra [3 P2], [5 P2]. Esse *tema* ao ser desenvolvido mostra-se ainda como pertencente a mesma Modulação – a Modulação Matemática - por carregar e complementar os sentidos matemáticos como aqueles referentes aos números primos inteiros, à unificação das álgebras em torno da idéia de decomposição ou, ainda, ao estabelecer-se a ordem entre as diferentes estruturas [6 P2], [7P2], [8 P2].

As *estruturas da Álgebra* como *método algébrico* se dá ao buscar definir as *estruturas* de certos sistemas algébricos com um conjunto limitado de dados [2 P2] em termos de propriedades operacionais. Levantando a possibilidade de unificação de todo o conhecimento matemático [1P2] tornando-se *tema* da Matemática.

2.2. NA PERSPECTIVA DO PRESENTE VIVO: O APRIORI UNIVERSAL HISTÓRICO

Propor uma análise das presenças das *estruturas da Álgebra* e do *ser humano* no fluxo da *maduração* é assumir-se o ser consciente de mundo em contínuo movimento. Continuamente, tem-se a percepção da realidade que se dá como campo perceptivo em forma de unidade.

> Todo percebido singular tem na percepção continuada, que se estende no fluxo longe ou perto, cedo ou tarde interrompido, um movimento próprio e extensivo de doar-se, e concomitantemente um horizonte de opiniões conjuntas de características como aquilo para o qual o real se mostra ou torna-se mostrado, quando o mesmo já seria dado como complementação da antecipação de horizonte. Isto é originalmente vazio, relativo, indeterminado e somente exepcionalmente em sobressalto previsto como o por vir antecipado no doar-se, que ainda está por ser completado. Para o qual toda visão singular de realidade tem uma opinião conjunta como horizonte externo.[174]

Na perspectiva do *presente vivo* descrito pela fenomenologia, o percebido não está enclausurado em *agoras* particulares. Ele tem um movimento próprio de doar-se e expor-se em campos perceptivos na forma de horizontes que comportam pareceres sobre suas características ou *invariantes estruturais* como *sínteses de identidade*. Ao analisar as respostas da pergunta *Como se dão as estruturas das presença das estruturas da Álgebra e do ser humano?* vem à tona o modo de expor-se da *idealidade* matemática *estruturas da Álgebra* caracterizada no movimento de sua construção/produção enquanto *objeto temporal* e investigado no filão apresentado pelo *texto-solo*.

Primeiramente, as *estruturas da Álgebra* se apresentam na linguagem do sistema de numeração e de suas operações e relações, mostrando o campo de

---

[174] Jedes einzelne Wahrgenommene hat in der kontinuierlichen Wahrnemung, der im Strom weiter oder weniger weit sich erstreckenden, bald früher, bald später abgebrochen, eine Bewegung der erweiternden und einigenden Selbstgebung, aber zugleich einen Horizont der Mitmeinung von "Eigenchaftlichen" als dem, worin das Reale sich selbst zeigt oder zeigen Würde, wenn dasselbe schon selbstgegeben wäre in Erfüllung der Horizontantizipation. Diese ist ursprünglich leer, relativ unbestimmt und nur ausnahmsweise in vorspringenden Vorveranschaulichungen als das Kommende antizipiert in einer Selbstgegebung, die doch erst zu erfüllen ist. Zudem hat jede einzelne Anscahung von Realem eine Mitmeinung als Aussenhorizont. *Idem*, *ibdem*, p. 251.

possibilidades numéricas e o esgotamento de possibilidades de seu sistema simbólico, como visto na análise fenomenológica dos elementos imaginários. Porém, concomitantemente, já se anuncia uma nova forma lingüística [13 P2] de se apresentar como um sistema de axiomas sintaticamente definido.

Essas mudanças-complementares dão-se no fluxo das temporalizações das *estruturas da Álgebra* de muitas maneiras e de forma bastante complexa. Nem sempre apresentam uma continuidade cronologicamente organizada do presente ao passado próximo porém, ao perseguir-se as protensões, os horizontes do *por vir*, complementa-se e aperfeiçoa-se o rastro das retenções concordantes.

Os *agoras*, que possibilitam o *ver claro* no decorrer das mudanças, não são para HUSSERL, passagens de conteúdo à conteúdo, pois o *por vir* doa-se na forma de *perfis*. O que sustenta as mudanças é o horizonte aberto pelas opiniões acordadas das características dadas nas *sínteses de identificação* como *forma temporal*. Como por exemplo: as *sínteses de identificação* dadas nas *comprovações*. Assim, a substância da *maduração* das *idealidades* é constituída de *forma temporal*, que se realiza ao *ir sendo* constituinte e em construção em um *sistema de reenvio* tecido em torno de *invariantes estruturais* percebidos, compreendidos e expressos.

> Enquanto a forma temporal une indivíduos em “unidades de conexão”, ela trabalha como o “entendimento escondido” que instala o “categorial” na experiência. Na medida em que a forma temporal é forma de indivíduos enquanto eles são indivíduos que duram, ela se confunde com a esfera da “sensibilidade”. Sensibilidade e entendimento são dois aspectos desta unidade mais profunda que é a consciência interna do tempo. É aqui que se encontra o verdadeiro “invisível” que se torna “visível”, a raiz da “subjetividade”, em toda a extensão em que se escande.[175]

As estruturas de presença das *estruturas da Álgebra* e do *ser humano* se dão em atos de percepção que também é ato de intuição. É um encontro do *ser humano* com a *forma temporal* e que sintetiza a união de *idealidade*s matemáticas e o entendimento que possibilitou e possibilita essa união. Essa

---

[175] MOURA, Carlos Alberto de. *Sensibilidade e entendimento na fenomenologia*. *Op. cit.*, p. 247.

forma temporal é presentificada na *maturação* das *estruturas da Álgebra*, tanto na linguagem do sistema numérico, como na linguagem do sistema de axiomas vistos como fenômeno. Esses sistemas lingüísticos matemáticos carregam em suas entranhas *invariantes estruturais* que compõem e geram a *forma temporal* das *estruturas da Álgebra*. Essa *forma temporal* doa-se na forma de *perfis*, como *invariantes estruturais,* ao ser questionada hermeneuticamente. *Essa forma temporal* se dá na *percepção de conjunto* ao se compreender suas características essenciais, ora como característica numérica, ora como leis essenciais, ora como característica estrutural.

3. O MODO DE SER MATEMÁTICO DO SER HUMANO

As respostas à pergunta *Qual é o modo de ser matemático do ser humano na construção do conhecimento das estruturas da Álgebra?* que compõem essa categoria serão articuladas na perspectiva dos *agoras* em torno do tema de *atos intencionais* e na perspectiva do *presente vivo* em torno do tema *consciência de Lebenswelt (mundo-vida)*.

3.1. NA PERSPECTIVA DOS *AGORAS*: ATOS INTENCIONAIS

Conforme descrito nas categorias modos de doação das estruturas da Álgebra e as estruturas das presenças – estruturas da Álgebra-ser humano, a construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* quando analisadas na perspectiva de seus *agoras* mostram a *maduração* da *idealidade estruturas da Álgebra*, como momentos de objetivação constituídos em *atos de percepção* que têm como primado experiências e apresentações explícitas e não explícitas e mundo constituído do *ir sendo* como *sendo* verdade no mundo, ou seja, *ir sendo* como permanente em validade.

Enfim, os *agoras* do movimento da construção/produção da *estruturas da Álgebra*, são entendidos como uma unidade constituída pelas retenções, assim como também pelas protensões que se articulam perfilados em torno da *finalidade* numa amarração entre o sentido da experiência e as concordâncias retidas na Modulação Matemática como práxis teórica. As *finalidades*, entendidas como possibilidades de experiências, podem ser vivenciadas tanto por um indivíduo, quanto por outros, gerando motivação a ser esclarecida.

> De uma motivação a ser esclarecida, do significado da modulação para a práxis ali determinada, a qual ainda não tenha sido considerada por nós, desperta na vida pessoal (pensada aqui como a vida de atos e capacidades do eu) a própria intenção do querer, em um sentido amplo, intenção prática de comprovação.[176]

Isto significa que a *motivação* surge enraizada à Modulação, uma vez que se dá na articulação do sentido da experiência, experiência aqui entendida como vivência, e concordâncias permanentes. Portanto, a *motivação* aqui exposta diz respeito àquilo que faz *sentido* no recorte de mundo dado na Modulação. Ela tem como pano de fundo o passado, presente e futuro, enquanto possibilidade do vivido e percebido.

A *motivação*, como *ato intencional* que leva ao querer, é explícitada nos depoimentos dos matemáticos estudados em diferentes contextos matemáticos. GALOIS vislumbra na elegância dos cálculos com coeficientes de equações, a *motivação* para buscar suas simplificações com a *finalidade* de encontrar raízes de equações [20 P3] criando a *noção de grupo*. DEDEKIND depara-se com a impossibilidade de referir-se aos números por meio de opiniões formadas no âmago da Aritmética [16 P3] e daí nasce a *motivação* para o uso de propriedades numéricas [17 P3] procurando abandonar o conceito numérico mediado pelas características geométricas [19 P3]. E mais tarde, ao lidar com as *noções estruturais*, a *motivação* surge da possibilidade de unir os números naturais, racionais e inteiros por um princípio [18 P3]. No trabalho de STEINIZ a *motivação* surge com a possibilidade de obter-se concentração de todos os *corpos numéricos* conhecidos [13 P3]. Para NOETHER a *motivação* surge, primeiramente, ao perceber a unificação de números, polinômios,

[176] Aus einer aufzuklärenden Motivation, von der Bedeutung der Modalisierung für die von uns hier noch nicht berücksichtigte handelnde Praxis her bestimmt, erwächst im persölichen Leben (allgemein sei hier gemeint das ichliche Akt-und Vermögensleben) die eigene Willensintention in einem weiteren Sinne praktischer Intention auf Bewährung. HUSSERL. P.255.

funções pelo princípio da decomposição e, mais tarde, a possibilidade da condução deste princípio para o âmbito das *estruturas da Álgebra*.

A *motivação* pode vir a ser esclarecida. Nela está implícita uma intenção de praticidade, que se revela, segundo HUSSERL, como comprovação: comprovação da antecipação de propriedades, antecipação de propriedades de coisas conjuntas e de suas particularidades.

> Comprovação é síntese de identificação do já validado em antecipação (indução no sentido amplo) com o que é dado como antecipação complementadora. O intencionado e o dado conserva na complementação o caráter de *ser efetivo* e *ser assim* e isto torna-se assim, neste carater próprio, do eu.[177]

No âmbito da construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra*, as comprovações dão-se no interior da Modulação Matemática, na forma de demonstração. As demonstrações explicitam as articulações do sentido da experiência com as concordâncias existentes expressas em noções, definições, construção de artifícios, axiomas, teorema e métodos que estão evidenciados em vários trechos do *texto-solo*. [2 P3], [3 P3], [5 P3], [6 P3], [7 P3], [8 P3], [9 P3], [10 P3], [11 P3], [12 P3], [14 P3], [15 P3], [18 P3], [21 P3] e [22 P3].

Nas demonstrações estão embutidas as complementações, que constituem os *perfis* dados nas fases temporais passadas da construção/produção e dos *agoras* das *estruturas da Álgebra*. Estes *perfis* são construtos humanos, que tornam-se próprios dos seres que os efetuam e podem revelar um *ir sendo* do ser humano, que é *ir sendo* matemático, que se "fenomenaliza" nas obras matemáticas.

Ao colocar-se em *epoché* o ser humano, o construtor da obra *estruturas da Álgebra*, tendo como pano de fundo o *texto-solo* construído nesta pesquisa, vislumbra-se um *ir sendo* matemático coerente com a *maduração* do *ir sendo* da Modulação Matemática em termos de percepção, compreensão, de

---

[177]Bewärung ist identifizierende Syntese des in Antezipation (induktion im weitesten Sinne) Vorgeltenden mit dem Selbstgegebenen als die Antecipation erfüllend. In der erfüllung erhält das bloss Intendiert und nun Selbstgegebene den Charakter des Wirlichesein und Sosein und wird so in diesem Charakter dem Ich eigen. HUSSERL, Edmund. *Schichten des Weltbewusstsein* (13. Juni 1936). Ergänzungsband texte aus dem nachlass. *Op. cit.*, p. 255.

construção e manuseio de linguagem, de rigor, de organização e modos de comprovação que buscam e conservam a coerência do objeto matemático estudado em cada uma das fases de sua *maduração*.

Essa busca nem sempre é fácil ou alcançável. Podem gerar dúvidas, incertezas e fracassos [1 P3], [4 P3].

Nos modos de *comprovação* posto nas obras matemáticas estão implícitos os modos de *ir sendo* do ser humano como construtor de caminhos matemáticos. Isto revela um modo de ser matemático do ser humano que é criativo. Essa criatividade refere-se a esfera da fantasia e imaginação humanas num sentido amplo, que não aquela da visão fantasiosa, por estar "intimamente ligada" a uma *forma temporal* do percebido do mundo. A esfera da fantasia, onde se presentifica a criatividade humana matemática, é delineada pelo eu ao perceber-se como ser humano sendo na Modulação Matemática de mundo permanentemente validada pela e na *intersubjetividade*.

3.2. NA PERSPECTIVA DO PRESENTE VIVO: CONSCIÊNCIA DE LEBENSWELT

A *intersubjetividade* analisada na visão do *presente vivo* e na perspectiva do *sistema de reenvio* de uma Modulação é descrita por Husserl como:

> Minha apresentação de mundo – necessariamente na forma de uma contínua percepção de mundo, parecer de mundo como núcleo e com um horizonte de possíveis pareceres em uma modulação, mediante a qual é conduzida a concordância da validação, mediante continua comprovação própria no nucleo do parecer – com a capacidade de qualquer repetição e identificação, com o sentido da reassunção e compreensão da validação continuada do visto antes, com isto uma comprovação da antecipação mediante antecipação evidente, que se comprova no núcleo explícito.[178]

[178] Meine Weltvorstellung – notwendig in der form einer stängigen Weltwahrnehmung, weltanschauung als Kern und mit einem horizont möglicher Anschauung in einer Modalisierung, durch die doch zur Einstimmigkeit der Geltung führt, durch ständige Selbstbewärung an dem Kern der Anschauung – mit dem Vermögen der beliebgen Wiederholung und Identifizierung, mit dem Sinn der Wiederaufnahme und Erfassung der

Portanto, na Modulação está implícita uma *indução normativa*, onde a *práxis* se funda e apresenta seus modos de *ir sendo*. A *práxis* em fluxo carrega o Apriori universal histórico, a validade de ser da *idealidade* e os *hábitos* humanos geradores de *comprovações* que são inerentes ao modo como a Modulação é contruída em sua *maduração*.

Os *hábitos*, entendidos como constelação de atos humanos inseridos no *sistema de reenvios*, também se constituem ao *ir sendo* em mudança de ato, que expressam o *ir sendo* do ser humano como permanecido, como apto a mudanças e como horizonte externo do mundo.

> Na minha mudança de apresentação muda-se para mim o mundo apresentado, ainda que ele se apresente continuamente como espaço-temporal e em geral em sua estrutura de mundo. Ele está na mudança da correção e tem uma unidade enquanto unidade de correção.[179]

Tem-se assim que as alterações ocorridas na *maduração* das *estruturas da Álgebra* não só dizem respeito a um modo de construir a Álgebra mas também dizem respeito a mudanças de atos ao se comprovar o *por vir* criando novas formas de estratégias, de definir e de demonstrar. Mudanças que também vão concomitantemente ocorrendo neste ser humano que é *ir sendo* matemático no fluxo como *agora*, como permanência do *agora*, como *agora* em fluxo, como um *eu* experimentador de mundo em fluxo. O mundo é apresentação e fluída sabedoria de mundo não somente sendo-validada por ato de validação no fluxo de uma vivência individual, mas no *habitual total* no qual o *eu* é em seu modo de *ir sendo* com todo mundo e sua história. A Modulação é o lugar onde as *formas de ser* ontológicas são mantidas apodidicamente.

> /.../ eu sei de antemão, que o aperfeiçoamento da correção (ajuste) antevista tornar-se-á sabido, e futuramente tornar-se-

---

Fortgeltung des früher schon Angeschauten, dazu indirekte Bestätigung der Antizipation durch evidente Antizipation, die sich im anschaulichen Kern bewärt. *Idem*, *ibdem*, p.260

[179]In meinen Vorstellungsveränderungen verändert sich für mich die vorstellte Welt, obshon sie ständig vorgestellt ist als raum-zeitliche und in ihrer Weltstruktur überhaupt. Sie steht im Wandel der Korrektur und hat Einheit als Einheit der Korrektur. *Idem*, *ibdem*, p. 263.

á agora do *ir sendo*, e isto, que eu agora tenho como mundo em validação e como base da minha práxis, carrega em si um não-ser desconhecido, que será ultrapassado no caminho futuro da correção e que tem evidência na validação, assim sem fim. Ser do mundo é internamente sempre relativo: isto é, apodídico.[180]

Deste ponto de vista as *estruturas da Álgebra*, conservadas em sua autoctonia, são expressões vivas de um recorte de mundo que revela, não uma outra Álgebra que a sua anterior, mas sim, um outro modo de ser matemático, um outro modo de colocar-se frente a Modulação Matemática possibilitando uma complementação e fazendo surgir uma outra objetivação das retenções. Um modo de ser matemático que assume-se no *poder ir sendo* horizonte externo no *sistema de reenvio*. Nessa análise as perguntas: Quantas formas de Álgebra existem? Qual é a Álgebra do meu aluno? Qual é a minha Álgebra? Qual é a Álgebra do algebrista? dão lugar à perguntas que focam diretamente o humano em sua práxis: Qual é o modo de ser do ser humano que está implícito nos fazeres algébricos? Os fazeres algébricos conservam a *forma temporal da* Modulação? Refletem a autoctonia de seus objetos? Seus objetos apresentam-se em que camada da objetivação de mundo?

O tema que permanece no fluxo da construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* nessa categoria é aquele que diz *do*, *para* e *ao* ser humano. Homem intencionalmente dirigido ao mundo-vida, que constrói *comprovações* do *por vir de mundo* no interior da Modulação Matemática, que se modifica nas modificações que efetua aprimorando *hábitos* e que, ao voltar-se para o mundo-vida, munido dos aprimoramentos de *hábito*, apresenta-se ao mundo de forma modificada. Esse mover-se no mundo conduz

---

[180] /.../ ich weiss im voraus, dass es voraussichtliche Korrektur-Vervollkommnung erfahren wird, und Künftig wird dieses im künftigen Jetzt das Seinde sein, und das, was ich jetzt gegenwärtig als Welt in Geltung habe und (als) Untergrund meiner Praxis, trägt in sich ein unbekanntes Nichtsein, das rest künftiger Gang der Korrektur wegstreichen wird und durchestrichen in Geltung hat, so ohne Ende. Sein der Welt ist inhaltlich immerzu relativ: das ist apodiktisch. *Idem*, *ibdem*, p. 263.

à abertura de novos horizontes que dá a esperança de podermos ver, o que há de mais humano nas possibilidades do mundo que *aí está* e é no *ir sendo*.

Capítulo V

AS ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA E O CÓGITO FENOMENOLÓGICO

> Sou eu que reconstituo o Cógito histórico, sou eu que leio o texto de Decartes, sou eu que reconheço ali uma verdade imperecível e, no final das contas, o cógito cartesiano só tem sentido por meu próprio Cogito, eu nada pensaria dele se não tivesse em mim mesmo tudo aquilo que é preciso para inventá-lo.
>
> Maurice Merleau-Ponty

O *pensar*, que se revela no movimento da contrução/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* descrito no *texto-solo*, constitui-se de atos intencionais que se dão no encontro do eu com o passível de ser pensado no fluxo da *maduração* da Modulação Matemática de mundo. Caracteriza-se como uma tomada de consciência de mundo que tem seu primado no ato da percepção de conjunto de objetos matemáticos ou da pluralidade dos objetos enquanto unidade.

Esse ato de percepção desdobra-se, conforme explicitado nas Categorias Abertas, em outros atos de ser-consciência que efetuam a unificação dos fenômenos revelados no movimento da construção/produção das *estruturas da Álgebra* em *objeto ideal*, ou seja, em objeto matemático.

Esse *pensar* pode ser analisado na perspectiva do *eu penso*, aquela do *cógito cartesiano*, pois ele se constitui de comprovações e atualidades sobre as *estruturas da Álgebra* que estão socialmente concordadas como sendo aquelas que não geram dúvidas e que se caracterizam como um agora. Porém os *agoras* na perspectiva fenomenológica, diferentemente da visão cartesiana, não são *agoras* isolados, pontos no espaço. Os *agoras* não são ultrapassados pelos seus *agoras* precedentes. Os *agoras* não deixam de ser presente ao tornarem-se passado, como os agoras cartesianos. Os *agoras* na concepção fenomenológica apresentam-se como multiplicidade de *perfis* passados e *perfis por vir,* constituindo a estrutura do *presente vivo* como um *ser* e *vir a ser* das *estruturas da Álgebra,* que se apresentam de modo explícito, como *ser aí,* revelando o atual, e de modo implícito como potencial, como o inatual e, ainda, num ver nítido e num ver obscuro.

Dessa forma, ao *eu penso*, como *cógito fenomenológico*, enquanto gênese de consciência de mundo, está implícito o inatual do passível de ser pensado, que se apresenta como *por vir*, como verdade de mundo, como concordância com o atual a ser comprovada na práxis humana. Portanto, esse inatual não corresponde à ilusões. Ao contrário, ele tem como potencial fazer parte do fluxo contínuo do *presente vivo*.

> Um eu "desperto", nós podemos definir como aquele, que executa no interior do seu fluxo de vivências a contínua consciência em uma forma especial de cógito; naturalmente não está aqui sendo pensado que isto comprova esta vivência, ou em geral, que leve à expressão predicativa e que leve à bens. Existem também indivíduos que são animais. Para o ser do fluxo de vida pertence um eu desperto, conforme afirmado acima, que está cercado de um meio de inatualidade na corrente contínua de cogitationes comprovadas, meio sempre pronto, a transformar-se em modo de atualidade, como o contrário de atualidade em inatualidade.[181]

Podemos afirmar que o *cógito fenomenológico*, o *eu penso,* realiza o movimento que une o atual, aquilo que está explicitamente dado, ao inatual, ao seu *por vir* e vice-versa. Dentre os atos unificadores realizados pelo *eu penso* está o ato de expressão. Exprimir é assegurar-se, por meio da linguagem já usada, que essa nova intenção de ato retome a herança passada; e num só gesto incorpore o passado ao presente e funda esse presente ao

[181] Ein "waches" Ich können wir als ein solches definieren, das innerhalb seines Erlebnisstromes kontienuierlich Bewusstsein in der spezifischen Form des cogito vollzieht; was natürlich nicht meint, dass es diese Erlebnisse beständig, oder überhaupt, zu prädikativem Ausdruck bringt und zu bring vermag. Es gibt já auch tierische Ichsubjekte. Zum Wesen des Erlebnisstromes eines waches Ich gehört es aber nach dem oben Gesagten, dass die kontinuierlich fortlaufende kette von cogitationes beständigt von einem Medium der Inaktualität umgeben ist, diese immer bereit, in den Modus der Aktualität überzugehen, wie umgekert die Aktualität in die Inaktualität. HUSSERL. In: Uwe C.Steiner. . Op. cit. p. 193.

futuro. Assim, todo pensamento construído no fluxo temporal permanece presente revelando camadas de objetivação galgadas pelos *eu desperto*.

Nessa pesquisa, a *noção de estrutura* é a camada primária de objetivação no *presente vivo* das *estruturas da Álgebra,* a qual teve como meio de inatualidade, ou seja, como meio propulsor, os números complexos e como *eu desperto*, DEDEKIND e GALOIS.

Esses homens foram capazes de executar no fluxo de suas vivências matemáticas um ato de consciência, que vai além de um percebido e intuído, que realiza uma expressão predicativa comprovando *cogitationes* e possibilitando a complementação do ciclo da inatualidade que se projeta à atualidade. A atualidade, por sua vez, constitui o *a priori sintético*, que torna-se solo, *cogitatio*, meio de inatualidade para outras camadas de objetivação que internalizam as *estruturas da Álgebra* no fluxo temporal da construção de seu conhecimento como conceitos expressos e validados, que correspondem a *finalidades* e assim continuamente.

A análise fenomenológica da construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* assim exposta, pode parecer bastante ingênua, pois dá a impressão de não contemplar o inesperado e o duvidoso na vivência humana. Na fenomenologia huserliana, tem-se a firmação:

> Nós entendemos por vivência, num sentido amplo, todo e qualquer encontrável no fluxo de vivência, não somente as vivências intencionais, as atuais e potenciais cogitationes, as mesmas tomadas em suas totais concretizações; mas tudo o que for encontrado no momento real nesse fluxo e em suas partes concretas.[182]

Isto quer dizer que a fenomenologia distingue a vivência intencional, como consciência de objeto intencional, da vivência num sentido amplo. Na vivência, de modo geral, pode-se falar sobre o objetos, pode-se pensar no objeto. Esses são atos de consideração que não correspondem à totalidade dos modos do *cógito fenomenológico* que têm como meta a vivência da atualidade,

---

[182] Unter Erlebnissen im weitesten Sinne verstehen wir alles und jedes im Erlebnisstrom Vorfindliche; also nicht nur die intentionalen Erlebnisse, die aktuellen und potentiellen cogitationes, dieselben in ihere vollen Konkretion genommen; sondern was irgend an reellen Momenten in diesem Strom und seinen konkreten Teilen vorfindlich ist. *Idem*, *ibidem*, p. 194.

que transmitem o sentido e os valores da experiência, e que também tem como meta a vivência da inatualidade do intencionado, como uma unidade que se dá em atos intencionais. Ao ser desse ato intencional que é o *cógito fenomenológico* pertence a possibilidade da mudança, da correção, ou de modificações coerentes que se dão na mesma relação que o condicionado e a condição.

É pela coerência das modificações que ocorrem na passagem do atual ao inatual, e vice-versa, no *sistema de reenvio*, desde o primado da construção/produção das *estruturas da Álgebra* até o presente histórico é que se pode afirmar a possibilidade da evidência originária que funda o pensamento do *eu penso* não como fatos, mas como fatos-valores, dados em modos de doação das *estruturas da Álgebra* no *presente vivo* e, conseqüentemente, detectar eventuais desvios de sentido originário, tomadas de rumos inesperadas e inautênticas da Modulação Matemática em seu modo de ser estrutural.

HUSSERL[183] aponta várias práticas teóricas que esvaziaram o sentido das fórmulas algébricas e formas geométricas que desencadearam irrefletidamente um processo de mudança de método nas Ciências que vai além da aritmetização e formalização. Essas mudanças se estendem até a Análise, Logística e Teoria das variedades (Männigfaltigkeitslehrer), como a Teoria das Estruturas.

Tanto a Aritmética Algébrica como a Teoria das Estruturas têm uma utilidade no *sistema de reenvio* da própria Aritmética Algébrica e da Teoria das Estruturas, mas também uma utilidade na Natureza matematizada pela Ciências Naturais. Assim, as áreas matemáticas estão sujeitas à interpretações advindas de outras áreas de estudo gerando regiões de inquérito.

A necessidade da Matemática de se aproximar da Lógica, o desenvolvimento da Lógica Formal como Teoria das Variedades, juntamente com a tendência científica da tecnização do mundo, provocam uma mudança que instala no seio das Ciências um pensar técnico. Como conseqüência deste pensar é carreado um desvio de sentido das *estruturas da Álgebra*.

---

[183] *Idem*, *ibidem*, p.465-470.

As *estruturas da Álgebra*, como *idealidade* matemática, vistas como objeto formal precisamente porque constituem a forma de objetos específicos da Modulação Matemática de mundo, são tomadas nessa fase temporal como hipóteses de trabalho nas mais variadas áreas das Ciências Naturais para interpretar regularidades. Dá-se uma inversão, semelhante àquela ocorrida no trabalho de HILBERT, ao tomar as propriedades dos números vistas como axiomas, como fatos que ocorrem em um conjunto numérico e talvez, essa inversão também reflita uma consonância com as idéias de HAMILTON de que propriedades operacionais pudessem vir a definir números complexos.

Nessa inversão, as *estruturas da Álgebra* que expressam o filão principal dos objetos estudados passam a valer como hipótese, sem qualquer relação ôntica/ontológica. Elas são tomadas como formas vazias passíveis de preenchimento substancialmente não matemáticos ou não essenciais e, mais grave do que isto, abre-se a possibilidade de essas formas serem preenchidas de coisas que ao doarem-se não revelam um mesmo *Apriori estrutural* de mundo como aquele que se apresenta perfilado no meio de inatualidade propulsor das *estruturas da Álgebra,* os números complexos na linguagem do sistema numérico decimal, causando uma utilização inadequada das *estruturas da Álgebra,* que encobriu sua autoctonia com o manto do pensar tecnicista.

O *presente vivo* das *estruturas da Álgebra* revela a relevância do *cógito fenomenológico:* busca consciência de mundo, assume a importância da evidência primeira incrustada na atualidade das *estruturas da Álgebra;* se realiza e se presentifica na prática humana; assume o mundo com profundidade temporal; retém no *agora* toda a história de mundo; e, como o fio de Ariadne, não permite que nos percamos nos labirintos interpretativos das vivências de mundo e no relativismo do conhecimento absoluto ao vislumbrar um futuro de mundo, porque a síntese aí presente

> /.../ não reside apenas em todos os vividos de consciência singulares, e não liga apenas ocasionalmente o singular com o singular; mais do que isso, como já dizemos antes, a vida total da consciência é sinteticamente unificada. Ela é um cógito universal, que compreende sinteticamente em si todos os vividos de consciência singulares, com seu *cogitatum* universal, fundado em diferentes camadas em multiplos *cogitata* separados. Certamente, esta fundação não significa uma construção na sucessão temporal de uma gênese, pois ao

> contrário todo vivido singular concebível apenas emerge em uma consciência total unitária sempre pressuposta. O cogitatum universal é a própria vida universal em sua unidade e totalidade abertamente infinita. (Husserl (1973), pp. 80-81).[184]

Ao efetuar-se nessa tese a análise intencional, que coloca o movimento da construção/produção do conhecimento das *estruturas da álgebra* em *epoché*, descortina-se um modo de pensar matemático vivo coerente com o *cógito fenomenológico* que abarca o ser humano no mundo, a ciência Matemática no fluxo temporal e a humanidade na Modulação Matemática de mundo. O modo de *pensar* imanente dessa construção/produção revela um fluxo temporal tecido por modos de doação e modos de intencionalidades. Os modos de doação das *estruturas da Álgebra* revelam-se como *invariantes estruturais* que conservam e compõem a sua autoctonia, desde seu nascedouro no âmbito dos números complexos até o presente histórico no âmbito da Matemática. Os modos de intencionalidades são, eles próprios, geradores de atos intencionais, advindos de vivências intencionais de *Lebenswelt* (mundo-vida) que se desdobram em atos de perceber, de intuir, de imaginar, de sentir, de querer, de cogitar, de comprovar, de criar, de expressar e de utilizar com a *finalidade* de objetivar o mundo em consciência. Nesse modo de *pensar* está inclusa (presente) uma prática que realiza camadas de objetivação de mundo sob o olhar da Modulação Matemática no modo estrutural que relaciona *idealidades* matemáticas pelas propriedades e por princípios essenciais.

Retomo a minha perplexidade inicial, aquela que apresentava-se a mim ainda perfilada nas minhas vivências. Percebo que o caminho da *superação* da experiência negativa da construção/produção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* aparece agora mais nítido quando vislumbrado sob a ótica do *cógito* f*enomenológico*. A dúvida não está centrada no *por vir* como algo do qual não sei nada, conforme Merleau-Ponty,

---

[184] MOURA, Carlos Alberto Ribeiro. *Sensibilidade e Entendimento na Fenomenologia*. Manuscrito. Revista Internacional de Filosofia. Husserl. Jairo José da silva & Michael B. Wrigley. *Op. cit*. p. 231.

> /.../ se o próprio pensamento não coloca-se nas coisas aquilo que em seguida encontraria nelas, ele não teria poder sobre as coisas, não as pensaria, ele seria uma ilusão de pensamento."[185]

Penso agora em cada momento de angústia pelos quais passaram os matemáticos descritos nessa tese ou naqueles alunos que tiveram ou que venham a ter um lampejo de compreensão das *estruturas* e se colocaram ou se colocam em estado de dúvida, que "implora" uma certeza. Isto pode gerar uma multiplicidade de pensamentos que tecem considerações sobre os próprios pensamentos, buscando explicações em todas as partes, sem tocar o duvidoso.

> A certeza provém da própria dúvida enquanto ato e não desses pensamentos, assim a certeza da coisa e do mundo precede o conhecimento tético de suas propriedades.[186]

A dúvida não nos desata da verdade e não anula nosso pensamento, isto porque ela está circundada por um horizonte de mundo que nos convida a procurar sua resolução. Assim, a dúvida como ato, é o que impulsiona a busca do *como* construir o caminho da comprovação do *por vir* intuído enquanto certeza, assim como a busca do como sossegar o ímpeto da perplexidade do *eu penso*, pois, enquanto isto não acontece permanece-se em estado condicional, imerso em um *se* que tem a profundidade das conquistas humanas alcançadas, com todo o peso de seu rastro de retenções, em contraste com a leveza da protensão do *por vir, do vir a ser* que projeta uma busca de um novo patamar que não só se restringe a um aprofundamento do conhecimento de um conteúdo de mundo, mas de mim mesmo enquanto eu desse mundo. Talvez seja por isso que às vezes os cientistas, pensadores e homens comuns se cansem de *ser* no *ir sendo* e optem pelo *ser* o *ir sendo.* E ao se desvincularem da "calda de retenções", descuidam de suas culturas, permitindo que surjam métodos, maneiras e hábitos que os coloquem na brisa de um *por vir* qualquer e que os desloca e os remete às não autoctonias dos constructos temporais pelos desvios de opiniões ao perderem-se no labirinto das interpretações sem raízes de mundo.

---

[185] MERLEAU-PONTY, Maurice. *Fenomenologia da Percepção. Op. cit.*, p. 496.
[186] *Idem*, *ibidem*, p. 512.

O *pensar* revelado no filão exposto nesta tese sobre as *estruturas da álgebra*, é um *pensar* que me põe à presença de objetos da Modulação Matemática que podem ser unificados por *invariantes estruturais*, ora como um individual matemático ora como membro de um conjunto matemático e que se doam em sua última objetivação como um sistema de asserções que revelam regras essenciais.

Munida desta compreensão, retomo às definições de grupo citadas no início desta tese. Percebo na definição de MAC LANE a presença de um rigor matemático em concordância com a análise do *pensar* revelado no movimento da construção/produção das *estruturas da Álgebra* e de suas camadas de objetivação. Na definição há elementos que dão-se como conjunto, do qual emergem três regras. Ser um destes conjuntos é ser um grupo. Caso os elementos do conjunto sejam funções, têm-se um grupo "abstrato", o que denota uma nova camada de objetivação dos elementos de um conjunto primário, um novo modo de doar-se dos elementos primários que compõem-se como uma função.

A definição de grupo dada por MAC LANE mostra-se, nessa análise, como um *agora* das *estruturas da álgebra* que assume a "cauda de retenções" dos *agoras* evidenciados no *texto-solo* construído nesta tese, mostrando ser possível o encontro de todos os *agoras-passados* no *agora presente.* Em outras palavras, possibilita encontrar a evidência primeira no fluxo de *maduração* e que este encontro se mostra como sendo um encontro revelador de autoctonia das *estruturas da Álgebra*.

Capítulo VI

REFLEXÕES PEDAGÓGICO-CIENTÍFICAS DO PESQUISADO

> Este livro iniciado não é uma certa reunião de idéias, para mim ele constitui uma situação aberta da qual eu não saberia dar a fórmula complexa, e em que eu debato cegamente até que, como por milagre, os pensamentos e as palavras se organizam por si mesmos.
>
> Maurice Merleau-Ponty

Sinto-me como um viajante que atravessou desertos, percorreu mares, voou em céu aberto e mergulhou em profundos oceanos iludido pela miragem de que, quando tudo tivesse sido percorrido e visitado, pudesse, facilmente, montar um ramalhete de idéias e soltá-lo ao vento. Flores que se transformariam em pássaros voadores, que em seu autônomo bater de asas ganhariam espaço e eu satisfeita pudesse recolher-me nos meus espaços outrora conhecidos. Mero engano! Na minha bagagem de volta, ao finalizar esta pesquisa, carrego lembranças, saberes e impressões que, assim como fala Merleau-Ponty, não sei dar a fórmula complexa. Então entrego-me ao som do "tec-tec" do teclado do computador oriundo do meu digitar e aguardo o milagre da organização de pensamentos e palavras.

A primeira coisa que me vem à mente são as protagonistas dessa tese: as *estruturas da Álgebra*.

Elas não se apresentam como algo que flutua sobre os números ou que saem deles. As estruturas lhes são próprias, elas lhes pertencem. Um pertencer que é desde sempre enquanto futuro, presente e passado. As *estruturas da Álgebra* vão se mostrando pouco a pouco no âmbito numérico. Elas se dão de forma explícita na Modulação Matemática como objetos individuais, somente quando o número atinge uma camada de objetivação que o expressa como uma totalidade em termos, não somente de uma propriedade numérica, mas também como uma reunião de diferentes conjuntos aos quais uma mesma estrutura pertence. Isto se dá concomitantemente ao ter explorado as possibilidades da modalidade lingüística que expressava os números até então, o sistema de numeração decimal, abrindo-se para uma nova forma de expressão, a linguagem do sistema de axiomas.

Isso leva-me a cogitar que as *idealidades matemáticas* não se dão à percepção no modo de totalidade, embora cada *agora* sintetize uma unidade. O que se tem, no *presente vivo* é um desenho perfilado de sua formação temporal, que engloba *perfis* passados, *perfis* presentes e *perfis* futuros e que sua coerência está e é transmitida na amarração temporal dos *perfis* enquanto *comprovação*. Além disto, ao penetrar-se em outras camadas de objetivação que se dão por meio da linguagem, há a possibilidade de esgotar-se os recursos lingüísticos impondo a necessidade de outras formas de expressão. Isto também é constatado nas minhas leituras sobre História dos Números. Há uma constante busca de símbolos e sistemas simbólicos nas civilizações antigas que culminam no sistema numeral decimal. Porém, os números podem ser expressos em outras linguagens, como por exemplo: os axiomas de Peano, para os naturais ou a linguagem dos conjuntos em termos de conjunto vazio e conjunto unitário. Pode-se, então, reconhecer nas formas simbólicas valores expressivos. Não estou afirmando que o símbolo seja número ou que o número seja símbolo, mas o símbolo remete-nos às propriedades estruturais dos números e, além disso, eles carregam a coerência de suas relações, conforme explicitado na *conceituação fenomenológica dos imaginários*.

Essas análises refletidas conduzem-me à sínteses das condições essenciais para dar-se a apresentação das *estruturas da Álgebra*. Como já foi explicitado, a percepção da estrutura se dá ao perceber-se um conjunto[187] que reúna todos os conjuntos numéricos conhecidos em torno de características e ao desdobrar-se em expressões lingüísticas e demais práticas matemáticas. O conjunto percebido e aqui abordado é o conjunto dos números complexos. O

[187] Conjunto está aqui sendo pensado como uma totalidade. Nestas inserções tenho a intenção de chamar a atenção para a idéia de conjunto que tem como solo as formas simbólicas, sem no entanto referir-me a uma linguagem específica.

corpo maximal do corpo dos racionais, que por sua vez contém os naturais e inteiros. Nesta perspectiva, o conhecimento das *estruturas* como um objeto da Álgebra se faz lado a lado com a certeza de que os números complexos são um corpo maximal, o que leva a idéia de uma totalidade numérica.

Com essas reflexões e acrescentando que a estrutura, definida ou não definida, é um conjunto e que as propriedades e os princípios não se dão isolados de seus conjuntos no ato da percepção, uma pergunta se coloca: podem os aprendizes de Matemática compreenderem as *estruturas da Álgebra* sem terem compreendido os números em seus modos de doação, em intencionalidade de ato que têm como pano de fundo uma intencionalidade de horizonte?

Como Educadores Matemáticos se intencionamos que a aprendizagem da Álgebra seja uma aprendizagem com sentido algébrico, do ponto de vista desta análise a reposta à essa questão é: é improvável que essa aprendizagem aconteça, pois as estruturas seriam apresentadas desvinculadas da totalidade perfilada em propriedades que permitem sua percepção. Muito provavelmente as estruturas tornar-se-iam formas vazadas que não expressam qualquer sentido de totalidade matemática conhecida, por que não podem ser substancializadas por algo matematicamente conhecido em termos de *perfis*.

A minha função de professora universitária mostra que ao educar-se, tendo como material de apoio a Matemática, evidencia-se, na maioria das vezes, o pensar técnico, prático e utilitário em detrimento dos aspectos essenciais da Matemática como uma Modulação de mundo. Penso que o conhecimento aprofundado e amplificado dos objetos da Matemática, que englobam técnicas, teorias, análises e reflexões sobre essa Modulação, possam auxiliar os Educadores Matemáticos a exercerem sua professoralidade, até mesmo nas ações cotidianas mais comuns, como por exemplo, ao decidir qual definição vai apresentar aos seus alunos. Como foi visto na introdução dessa tese, há diversas maneiras de apresentar um mesmo conceito. As definições podem, ou não, apresentar os *a priori sintéticos* e o Apriori estrutural.

Uma outra questão que aflora neste trabalho é a que diz respeito à razão de ser das demonstrações matemáticas na vida humana. Tenho observado na cotidianidade de professores do ensino básico e superior que por serem elas compreendidas pelo pensar lógico como verdade em si ou pelo pensar relativista como verdade de adequação, elas passam a ter pouca evidência no processo educacional principalmente, nos processos que almejam o ensino pragmático, sustentado pela argumentação de que as demonstrações se referem somente ao conhecimento absoluto, ou a uma herança da cultura grega associada ao pensar platônico.

A razão da presença da demonstração nos cursos de licenciatura, analisada no trabalho de GARNICA está caracterizada pelos seus aspectos técnicos e críticos. Sucintamente, os aspectos técnicos, dizem respeito às questões de fundamentação da Matemática e os críticos às de fundamentação da Educação Matemática que contempla as questões da demonstração no âmbito educacional. Na opinião do autor essas duas regiões não se interconectam na prática docente.

> O trabalho com a prova rigorosa, posto que não precisa ser tematizado, é reservado às disciplinas de conteúdo específico, no que se refere aos cursos de formação do professor de matemática. As disciplinas do núcleo pedagógico, que historicamente compõem o cerne da formação "dispensável" à qual o futuro professor tem acesso, teriam o papel de coadjuvantes, podendo até "tematizar" as demonstrações, já que dificilmente contaminariam o domínio do conteúdo, este soberano.[188]

Entendo que GARNICA chame a atenção, ao expor essas idéias, para a necessidade de uma aproximação dessas duas instâncias evidenciadas, propondo uma implementação da abordagem histórico-filosófica sobre as demonstrações tanto nas disciplinas específicas quanto nas pedagógicas.

Vislumbro nas idéias expostas sobre as demonstrações quando compreendidas pelo *cógito fenomenológico* uma possibilidade de aproximação entre as posturas técnica e crítica, segundo a minha compreensão ao ler o trabalho de GARNICA, pois a razão de ser das demonstrações dizem respeito tanto à Matemática enquanto corpo de conhecimento, enquanto Modulação de

---

[188] GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Educação, Matemática, paradigmas, prova rigorosa e formação do professor. In: *Fenomenologia uma visão abrangente da Educação*. Op. cit. p. 148.

mundo e a imagem desse conhecimento enquanto horizonte de mundo para o ser humano.

Como foi exposto nas *Categorias Abertas*, as demonstrações quando compreendidas pelo *cógito fenomenológico*, são de fundamental importância para a compreensão da *formação da idealidade* atrelada ao seu sentido de mundo. As demonstrações, são comprovações do *por vir* intuído, transmitem o sentido total, o Apriori universal histórico e as concordâncias culturais que expressam concordâncias pessoais, pois se dão no intersubjetivo. Nessa perspectiva, as demonstrações, por tanto a prova rigorosa por se tratar das *estruturas da Álgebra*, são essenciais para a sua compreensão em diferentes camadas de objetivação e, além disso, para a produção do conhecimento das *finalidades*, *hábitos*, enfim, para se exercer o *pensar* que aflora ao estar em sua presença. Não quero dizer com isso que as demonstrações devam ser trazidas à presença dos aprendizes de uma só maneira e nem tampouco na maneira usual. Ao contrário, creio que os modos de demonstração nas camadas de objetivação das *estruturas da álgebra* possam revelar possibilidades pedagógicas ainda não exploradas nos fazeres das salas de aula.

Estou consciente que nas entrelinhas da minha primeira tentativa de apresentar um possível caminho para a compreensão das *estruturas da Álgebra* está implícita uma Pedagogia que tenha como fio condutor o *cógito fenomenológico*. Embora saiba que esse é um projeto gigantesco, que deva envolver vários aspectos, pretendo expor o horizonte pedagógico que agora vislumbro.

Compreendo como uma de suas camadas o trabalho de investigação realizado na concretude do *ser* e *ir sendo* aluno-professor-conteúdo no mundo. Conteúdo, seguindo a orientação de ZABALA[189], é tudo aquilo que se tem que aprender para atingir um objetivo. Nele está implícito conceitos, procedimentos e atitudes. Portanto essa é uma investigação retrospectiva que abrange a Matemática enquanto ciência, a educação enquanto região de inquérito e as suas possíveis interconexões. A idéia de que a educação possa ser tomada

> /.../ como um tema de estudo e, ao mesmo tempo, como o *pro-jeto humano* que abrange ações, escolhas, análises, reflexões e processos de ensino e de aprendizagem. *Pro-jeto* que se estende no fazer e no transfazer de cada um individualmente e de todos em conjunto, em que o individual e o coletivo não encontram limites divisórios mas se interpenetram formando redes interconectadas.[190]

poderá ser estendida à outras camadas. Na perspectiva do *cógito fenomenológico*, as redes interconectadas são portadores de núcleos de sentido de mundo (Lebenswelt) e significados atribuídos pelos indivíduos que vivenciam intencionalmente o mundo. Indivíduos que se colocam em presença do mundo e que se abrem para as doações do mundo. Portanto, o trabalho de investigação retrospectiva tem como ponto fundamental que o professor de matemática perceba-se no seu *ser ir sendo* com os alunos, perceba-se no seu *ir sendo* no seu ato de *dar aula* de Matemática, que revela seu modo de ser matemático e o seu modo de intencionalidade ao compreender os modos de doação dos objetos matemáticos. Além disto, é preciso que permaneça atento para o *ir sendo* do indivíduo como aluno e no *ir sendo* matemático do aluno e seus modos de intencionalidades. Essas vivências geram interrogações, estados de dúvidas e caminhos de entendimentos, que ao meu ver inauguram uma Modulação de mundo, que diz do sujeito, da educação, do mundo e da Matemática.

No horizonte desta Modulação de mundo está o horizonte de todas as outras possíveis Modulações de mundo que têm o *intersubjetivo* como fundante de suas objetivações e de suas possíveis interconexões. Ao assumir o *cógito fenomenológico* como *ser consciente de mundo* abre-se a possibilidade de uma Pedagogia cujo o potencial abarca todas as possíveis Modulações de mundo que se formam na relação intencional homem-mundo, que tem como projeto um trabalho didático-pedagógico intermodular, que foca a *intermodularidade* do conhecimento humano de mundo.

---

[189] ZABALA, Antoni. A prática Educativa – como ensinar. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto alegre: Artmed, 1998.

[190] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *A contribuição da Fenomenologia à Educação. In* Fenomenologia uma visão abrangente da educação.(orgs.) Bicudo & Cappelletti. São Paulo: olho dágua, 1999, p. 11.

Caminhando para uma síntese de transição entendo que a perplexidade que me moveu nesta investigação aos poucos foi se desanuviando pela efetivação da análise fenomenológica das *estruturas da Álgebra* e da clareira que se fez ao vislumbrar o significado do *cógito fenomenológico* que se desvela na prática algébrica. Ao direcionar esse entendimento para o fazer do professor de Matemática, ao estar com seus alunos e com a Matemática, a Pedagogia se mostra em sua plenitude, solicitando por um trabalho educacional que assuma a postura fenomenológica tanto no que diz respeito aos aspectos de relação entre pessoas e com a instituição escola como com a construção/produção do conhecimento, neste caso particular do conhecimento matemático e suas articulações de sentidos e significados percebidos atribuídos e compreendidos no tempo.

Locomovo-me, portanto, na região de inquérito da Filosofia da Educação Matemática, não me subtraindo ao horizonte vislumbrado.

Ao afirmar que essa tese locomove-se na região de inquérito da Filosofia da Educação Matemática tenho em mente o seu movimento de pesquisa.

Ele é filosófico por que realiza uma reflexão, na qual explicita-se o estrutural do fenômeno *estruturas da Álgebra* posto na forma de Categorias Abertas que emergem ao se colocar a construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* em *epoché*.

Na articulação das Categorias Abertas defronto-me com constatações sobre o pensar que se revela no movimento da construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* que dizem do ser humano no mais íntimo de possíveis ações desencadeadas ao estar-se na presença de mundo-vida, fazendo jus ao pensar husserliano que perseguia a interrogação: como podemos fundamentar racionalmente a atividade matemática no mais amplo contexto da cognição humana?

Portanto, a tese trata das *estruturas da Álgebra* numa perspectiva filosófica, aquela da fenomenologia, que contempla finalidades da Educação Matemática por abordar o pensar estrutural como tomada de *consciência de mundo-vida* constituída de atos intencionais que tecem uma descrição sobre a cognição humana no âmbito da Matemática. Nessa perspectiva as *estruturas da Álgebra* tornam-se tema da educação do ser humano e estão interconectadas com objetivos de ensino e aprendizagem que tem como material de apóio conteúdos matemáticos.

INTERLÚDIO

Tendo em mente tudo que foi exposto nessa tese sobre o movimento da construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* no âmbito da Matemática, da História da Matemática, da Filosofia da Matemática e da Filosofia da Educação, nós professores de Matemática não podemos mais adotar a postura ingênua de que o simples uso de símbolos e adoção de métodos possam transmitir a complexidade da articulação *atividades matemáticas/atos cognitivos/finalidades* que possibilitam um pensar estrutural e nem tão pouco negar a importância desse pensar para nossas vidas uma vez que é relacional.

Esse pensar, não se trata absolutamente de um jogo, de um articulação lógica matemática de regras ou de uma articulação puramente interpretativa/associativa de uma linguagem desvinculada da compreensão que é presença das *estruturas da Álgebra* em sua características fundamentais e presença de ser humano em seu potencial intuitivo/criativo. Trata-se de um olhar que o ser humano lança ao já conhecido, que é novo por que vislumbra novos horizontes, porém esses novos horizontes contemplam e têm suas raízes no conhecimento matemático instituído.

Há, nesse pensar, uma mudança de perspectiva que engloba outras perspectivas já conhecidas, portanto a Álgebra Abstrata, por tratar das *estruturas da Álgebra*, quando assumida numa abordagem fenomenológica, não pode mais ser tomada como uma seqüência natural da Álgebra que a antecedeu. O olhar que se lança às coisas conhecidas é outro, embora o tema permaneça o mesmo e isto queira dizer que algo permanece em fluxo.

Assim, não dá mais para cair de para-queda não se sabe aonde, colocar-se em uma situação de construção de conhecimento tão vazia e sem chão, como o é quando as estruturas são tomadas como hipóteses, perdendo suas relações ôntico/ontológicas. Isto é levado a tal ponto no ensino que a única pergunta que resta ao aprendiz é: *para que a Álgebra Abstrata? Onde eu uso* *isto?* E nós, professores de Matemática, sempre prontos a tornar nossa disciplina mais aceitável recorremos a resposta direta. Recorremos à aplicabilidade das estruturas. Eu me pergunto: Será que sob as bases da aplicabilidade, a construção do conhecimento algébrico estrutural acontece? O que do pensamento estrutural se incorpora ao ser as *estruturas da Álgebra* colocadas do ponto de vista técnico/aplicativo?

Essa tese possibilitou-me tecer constatações sobre o pensar que se revela na construção do conhecimento das *estruturas da Álgebra* que vai muito além do pensar técnico por que põe em evidência a autoctonia das *estruturas da álgebra*. Essa constatação solicita um programa de ensino das *estruturas da Álgebra* que assuma radicalmente a sua gênese em sua transmissibilidade, em seus modos de *ser* e *ir sendo*, em seus modos de expressão, em seus modos de organização, levando em conta os processos científicos e cognitivos que as construíram/produziram explicitados, neste meu trabalho, como camadas de objetivação, para que o movimento de ensino e aprendizagem da *estruturas da Álgebra* possa estender-se efetivamente a outras regiões de inquérito que tratam de uma formação de ser humano que contempla a consciência de mundo, que gera querer como finalidades, que acrescentem valores humanitários a nossa existência.

Entendo que a tese ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA – investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento é um fundante, um início de começo.

BIBLIOGRAFIA

ANASTÁCIO, M. Q. A Três ensaios numa articulação sobre recionalidade, o corpo e a educação na matemática. Tese de doutorado. Faculdade de Educação. UNICAMP, Campinas, 1999.

BELL, E. T. *Historia de las Matemáticas*. Trad. R. Ortiz. 3. ed. México: Fondo de cultura Económica. 1996. 656 p.

BICUDO, I. *Sobre a história da matemática*. Bolema, Rio Claro, Especial nº 2, p. 7-25, 1992.

_________. *O que é álgebra*. Palestra.

_________. Platão e a Matemática. Palestra.

BICUDO, M. A V. *Fenomenologia - Confrontos e avanços*. São Paulo: Cortez, 2000. 167 p.

________. *O pré-predicativo na construção do conhecimento geométrico*. In: BICUDO & BORBA (Orgs). *Educação matemática - pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004. p. 77-91.

________. *A hermenêutica e o trabalho do professor de Matemática*. *Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos*. São Paulo, Vol. 3, p. 63-95, 1993. Disponível em: < www.sepq.org.br>

________. *Concepção de história presente no pensar husserliano*. In V Seminário de História da Matemática, 2003, Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003. p.125-140.

________. *Sobre a "Origem da Geometria"*. *Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos.* São Paulo, Vol. 1, p. 49-72, 1990. Disponível em: < www.sepq.org.br>

________. *Tempo, tempo vivido e história*. Bauru: EDUSC, 2003. 95 p.

________. *A contribuição da fenomenologia à educação*. In BICUDO & CAPPELLETTI (Orgs). *Fenomenologia uma visão abrangente da Educação*. São Paulo: Olho dágua, 1999. p.11-51.

_________. *Filosofia da educação matemática* – concepções e movimento. Brasília: plano, 2003. 131 p.

BORNHEIM, G. *A Introdução ao Filosofar — O pensamento filosófico em bases existenciais*. São Paulo: Globo, 1998. 161 p.

BOURBAKI, N. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial, 1976.

CANTOR, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Zweiter Band. Leipzig: Von B. G. Teubner, 1913. 893 p.

CARTAN, E. *Numbres Complexes*. Exposé, D'aprés L'article Allemand de E. Study. In: [s/d]

CHAUI, M. *Convite à Filosofia*. São Paulo: Ática, 1994. 440 p.

CORRY, L. *Modern algebra and the rise of mathematical Structures*. Basel. Boston. Berlin: Birkhäuser, 1996. 460 p.

D'AMBRÓSIO, U. *Reflexões sobre História, Filosofia e Matemática*. Bolema, Rio Claro, Especial nº 2, p. 42-60, 1992.

DAVIS, P. J. & HERSH, R. *A experiência matemática*. Trad. João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985. 481 p.

_________. *O Sonho de Descartes. O mundo de acordo com a Matemática*. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988. 335 p.

DEDEKIND, R. *Gesammelte mathematische Werke. Zweiter Band*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-ges., 1931. 414 p.

DERRIDA, J. *A voz e o fenômeno*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1994.[s/d]

DOMINGUES, H. H. & IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 3ª ed., 2ª reimpr. São Paulo: Atual, 1982. 263 p.

DROSDOWSKI, Günther. *Duden Etymologie - Herkunftswörterbuch der deutschen Sprache*. Manheim: Dudenverlag, 1989.

DUDEN. *Das Bedeutungswörterbuch*. Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich: Dudenverlag, 1985. 796 p.

EDWARDS, H. *Galois Theory*. New York. Berlin. Heidelberg. Tokyo: Springer- Verlag, 1984. 150 p.

ERNEST, P. *The philosophy of Mathematics education*. New York: The falmer press, 1991. 329 p.

ESPÓSITO, V. H. C. *Hermenêutica: Estudo Introdutório*. *Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos*. São Paulo, Vol. 2, p.85-112, 1993. Disponível em: < www.sepq.org.br>

FREGE, G. *Die Grundlagen der Aritmetik*. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner, 1884. 119 p.

FREUDENTAL, H. *Mathematics as an educational task*. Dorbrecht: The Netherlands by D. Reidel, 1973. 679 p.

GADAMER, Hans-Georg. *Verdade e método — Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica*. Trad. Flávio Paulo Meurer. Petrópolis: Vozes, 1997. 731 p.

GARNICA, A V. M. *A interpretação e o fazer do professor: a possibilidade do trabalho hermenêutico da Educação Matemática*. Dissertação de mestrado. Instituto de geociências e ciências exatas, UNESP, Rio Claro, 1992.

________. A V. M. *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática*. Tese de doutorado. Instituto de geociências e ciências exatas, UNESP, Rio Claro, 1995

________. *Educação matemática paradigmas prova rigorosa e formação do professor*. In BICUDO & CAPPELLETTI (Orgs). *Fenomenologia uma visão abrangente da Educação*. São Paulo: Olho dágua, 1999. p.105-154.

GRANGER, G. G. *O irracional*. Trad. Álvaro Lorencini. São Paulo: UNESP, 2002. 290 p.

HEIDEGGER, M. *Was heißt Denken?* Stuttgart: Reclam, 2001. 80 p.

_________. *Ensaios e conferências*. Trad. Emmanuel Carneiro Leão, Gilvan Fogel, Marcia Cavalcante Schubach. Petrópolis: vozes, 2002. 269 p.

_________. *The concept of Time*. Trad. Willian McNeil. Oxford: Blackwell, 1992. 39 p.

_________. *Um discurso comemorativo*. Trad. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Leopoldianvm – revista de Estudos e Comunicações. Santos, Vol. X, nº 28, agosto, p.19-40, 1983.

_________. *Ser e Tempo*. Trad. Márcia de Sá Cavalcante. 4ª ed. Petrópoles: vozes, 1993. 323 p.

HERSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra*. Trad. Adalberto P. Bergamasco & L. H. Jacy Monteiro. São Paulo: Polígono, 1964. 414 p.

HUSSERL, E. *Die Urstiftung und das Problem der Dauer. Der Ursprung der Geometrie.* In: STEINER, Uwe C. *Husserl*. München: Diederichs, 1997. 550 p.

_________. *Schichten des Weltbewusstsein* (13. Juni 1936). Ergänzungsband texte aus dem nachlass. In: *die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendentale Phänomenologie*. Band XXIX. Husserliana. Dordrecht/Boston/london: Kluwer Academic publishers, [s/d].

_________. *The shorter logical investigations*. Trans. J. N. Findlay. London and New York: Routledge, 2001. 422 p.

_________. *Investigações lógicas* 1. Trad. Manuel Morenga e José Goas. Madrid: Aliança Editorial, 1929. [s/d]

_________. *A crise da humanidade européia e a filosofia*. Trad. Urbano Z. Coleção Filosofia-41, Porto alegre: edipucrs,1996. 87 p.

_________. *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*. 4ª ed., Tübing: Niemeyer, 1980. 323 p.

_________. *Formale und transzendentale Logik*. Versuch einer Kritik der logichen Vernunft. Freiburg: Niemeyer, 1929. 298 p.

_________. *La crisis de las ciencias europeas e la fenomenologia transcendental*. Trad. Jacobi Munoz e Salvador Mas. Madrid: [s/d]. 366 p.

IFRAH, G. *Os números – história de uma grande invensão*. Trad. Stella M de Freitas Senra. 3ª ed., São Paulo: globo, 1989. 367 p.

IRMEN, F. & KOLLERT, A M. C. *Langenscheidts Tachenwörterbuch Portugiesch*. Berlin-München-Wien-Zürich-New York: Langenscheidt, 1997. 1199 p.

KANT, E. *Critik der reinen Vernunft*. Band 3. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1983. 308 p.

KLEIN, J. *Greek mathematical thought and the origen of Algebra*. Trad. Eva Braun. New York: Dower publications, 1992. 360 p.

KLINE, M. *Mathematical thought from anciente to modern times*. Oxford., 1972. [s/d]

_________. *Mathematics in Western Culture*. London. Oxford. New York: Oxford University Press, [s/d].

KLUTH, V. S. *Estudo sobre Resolução de uma equação por Radicais*. TCC. Departamento de Matemática. FEB – Faculdade de Ciências. 1973. 19 p.

_________. *O que acontece no encontro sujeito-matemática?* Dissertação de mestrado. Instituto de geociências e ciências exatas, UNESP, Rio Claro, 1997.

_________. *O que acontece no encontro sujeito-matemática?* Epsilon, Revista de la S.aE.M. "Thales", San Fernando, nº 42, vol. 14(3), p. 373-386, 1998.

_________. *Do significado da interrogação para a investigação em educação matemática*. Bolema. Rio Claro, Ano 14 – nº 15, p. 69-82, 2001.

_________. *A rede de significados: imanência e transcendência: a rede de significação.* In: BICUDO, M. A V. *Fenomenologia – Confrontos e Avanços.* São Paulo: Cortez, 2000.167 p.

_________. *Pesquisando a construção do conhecimento algébrico: um mergulho na história*. In: V Seminário de História da Matemática – UNESP, 2003, Rio Claro. Anais. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003. p. 465-463.

_________. *Ensaio/Resenha: Modern algebra and the rise of mathematical strutures*. Revista Brasileira de História da Matemática – vol. 4, nº 7 (abril/2004 –setembro/2004). P. 97-102.

LEAR, J. *Aristotle: the desire to understand. [s/1]* Cambrige University Press*, [s/d].*

LIMA, E. L. Sistemas de logaritmos. Revista do Professor de Matemática. Nº 18. SBM, p. 24-31, 1991.

LINS, R. C. *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Thesis submitted to the University of Nottingham, 1992.

MAC LANE, S. *Mathematics Form and Function*. New York: Springre, 1986. 256 p.

MARTINS, J. *Um Enfoque fenomenológico do currículo: Educação como Poíesis.* Org: Vitória Helena Cunha Espósito. São Paulo: Cortez, 1992. 142 p.

MEDEIROS, A & MEDEIROS C. *Números negativos: Uma história de incertezas*. Bolema, Rio Claro, Ano 7, nº 8, p.49-59, 1992.

MERLEAU-PONTY, M. *O Primado da Percepção e suas Consequências Filosóficas*. Trad. Constança Marcondes Cesar. Campinas: Papirus. 1990. 95 p.

_________. *Fenomenologia da Percepção*. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Martins Fontes, 1994. 662 p.

MIGUEL, A. *As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores.* ZETETIKÉ. Campinas, Vol. 5 Nº 8 – Julho/dezembro, p. 73-105, 1997.

MILLER, J. P. *Numbers in presence and absence: A study of Husserl's Philosophy of Mathematics*. The Hague/Boston/ London: Martinus Nijhoff Publishers, 1982. 147 p.

MORA, J. F. *Diccionario de Filosofía* .Tomo I –A-K. Buenos Aires: Editorial Sudamericana, 1971. [s/d]

MOURA, C. A de. *Sensibilidade e entendimento na fenomenologia*. Manuscrito – Revista Internacional de Filosofia. Husserl. editors Jairo José da Silva & Michael B. Wrigley. Campinas, Vol. XXIII-Nº 2- Outubro, p. 207-249, 2000.

Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa. 2ª edição. Rio de Janeiro: Nova fronteira, 1986.

OTTE, M. *O Formal, o social e o subjetivo – Uma introdução à filosofia e à didática da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 1991. 323 p.

_________. *Concepção de história da matemática*. Bolema, Rio Claro, Especial, p 104-119, 1992.

SILVA, J. J. da. *Sobre o predicativismo em Hermann Weyl*. vol. VI. Coleção CLE. Campinas: CLE, 1989. 230 p.

_________. Husserl's Philosophy of Mathematics. Manuscrito XVI(2). Campinas: CLE/UNICAMP, p. 121-148, 1993.

_________. *Husserl's conception of logic*. *Manuscrito XXII*. Campinas: CLE/UNICAMP, p. 367-397, 1999.

_________. *Husserl's Two Notions of Compleness*. *Synthese*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 418-438, 2000.

_________. *The many senses of Completeness*. *Manuscrito XXIII(2).* Campinas: CLE/UNICAMP, p. 41-60, 2000.

_________. *Husserl e a Matemática simbólica*. (manuscrito)

SILVA, C. C. & MARTINS, R. de A. *Por que os quatérnions são compostos por quatro números?* In: V Seminário de História da Matemática – UNESP, 2003, Rio Claro. Anais. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003. p. 243-259.

SMITH, B. *Logic an formal ontology. Manuscrito XXIII(2).* Campinas: CLE/UNICAMP, p. 275-323, 2000.

STEINER, U. C. *Husserl*. München: Diederichs, 1997. 550 p.

STEINITZ, E. *Algebraische Theorie der Körper*. New York: Chelsea Publishing Company, 1950. 171 p.

STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas*. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gravida, 1997. 395 p.

VAN DER WÄNDER, B. L. *A history of Algebra – From al-khawarizmi to Emmy Noether*. New York: Springer, 1985. 270 p.

_________. *Moderne Algebra*. New York: Frederick Ungar publishing CO. 1943. 267 p.

_________. *Modern Algebra*. Trans. Fred Blun. New York: Frederick Ungar publishing CO. 1949. 259 p.

ZAPATER, L. F. *A intuição no conhecimento matemático: algumas considerações para possíveis articulações com a educação matemática. Dissertação de mestrado.* Instituto de geociências e ciências exatas, UNESP, Rio Claro, 1997.

WEDBERG, A. *Plato's Philosophy of Mathematics*. [s/d].

WUSSING, H. *Lecciones de historia de las matemáticas.* México: Siglo XXI de España Editores, 1989. 344 p.

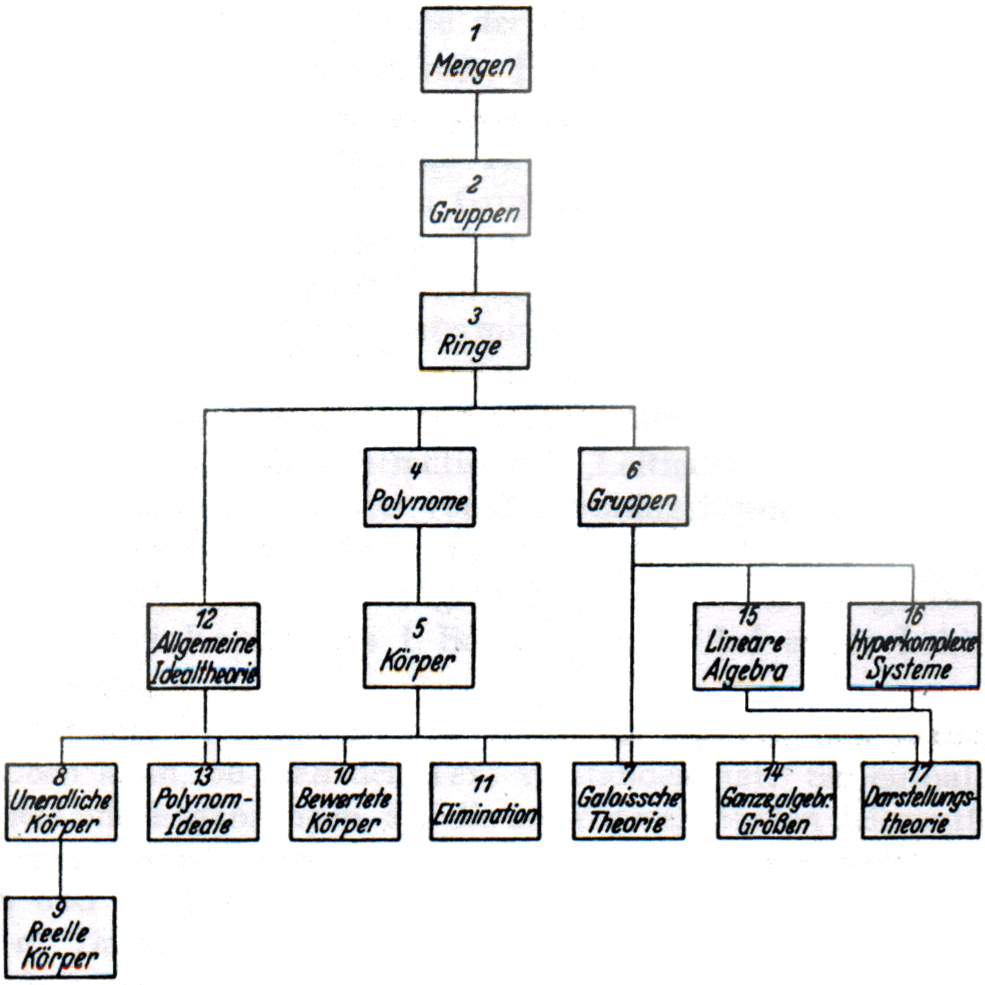
_________. *Die Genesis des Abstrakten Gruppenbegriffes*. Berlin: Veb Deutscher Verlage der Wissenschenften, 1969. 258 p.

ANEXOS

ANEXO 1

Leitfaden.

Übersicht über die Kapitel der beiden Bände und ihre logische Abhängigkeit.



ANEXO 2

Zweites Kapitel.

Gruppen.

Inhalt: Erklärung der für das ganze Buch grundlegenden gruppentheoretischen Grundbegriffe: Gruppe, Untergruppe, Isomorphie, Homomorphie, Normalteiler, Faktorgruppe.

§ 6. Der Gruppenbegriff.

Definition. Eine nicht leere Menge $\mathfrak{G}$ von Elementen irgendwelcher Art (z. B. von Zahlen, von Abbildungen, von Transformationen) heißt eine *Gruppe*, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

1. Es ist eine *Zusammensetzungsvorschrift* gegeben, welche jedem Elementepaar a, b von $\mathfrak{G}$ ein drittes Element derselben Menge zuordnet, welches meistens das *Produkt* von a und b genannt und mit ab oder $a \cdot b$ bezeichnet wird. (Das Produkt kann von der Reihenfolge der Faktoren abhängen: es braucht nicht $ab = ba$ zu sein.)

2. Das *Assoziativgesetz*: Für je drei Elemente a, b, c von $\mathfrak{G}$ gilt:
$$ab \cdot c = a \cdot bc.$$

3. Es existiert (mindestens) ein (linksseitiges) *Einselement* e in $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft:
$$ea = a \text{ für alle } a \text{ von } \mathfrak{G}.$$

4. Zu jedem a von $\mathfrak{G}$ existiert (mindestens) ein (linksseitiges) *Inverses* a^{-1} in $\mathfrak{G}$, mit der Eigenschaft
$$a^{-1}a = e.$$

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn außerdem stets $ab = ba$ ist *(kommutatives Gesetz)*.

ANEXO 3

§ 11. Ringe.

Die Größen, mit denen man in der Algebra und Arithmetik operiert, sind von verschiedener Natur; bald sind es die ganzen, bald die rationalen, die reellen, die komplexen, die algebraischen Zahlen; die Polynome oder die rationalen Funktionen von n Veränderlichen usw. Wir werden später noch Größen von ganz anderer Natur: hyperkomplexe Zahlen, Restklassen u. dgl., kennenlernen, mit denen man ganz oder fast ganz wie mit Zahlen rechnen kann. Es ist daher wünschenswert, alle diese Größenbereiche unter einen gemeinsamen Begriff zu bringen und die Rechengesetze in diesen Bereichen allgemein zu untersuchen.

Unter einem *System mit doppelter Komposition* versteht man eine Menge von Elementen $a, b, \ldots$, in der zu je zwei Elementen a, b eindeutig eine *Summe* $a+b$ und ein *Produkt* $a \cdot b$ definiert sind, die wieder der Menge angehören.

Ein System mit doppelter Komposition heißt ein *Ring*, wenn folgende *Rechengesetze* für alle Elemente des Systems erfüllt sind:

I. *Gesetze der Addition.*

a) *Assoziatives Gesetz*: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

b) *Kommutatives Gesetz*: $a+b=b+a$.

c) *Lösbarkeit*[1] *der Gleichung* $a+x=b$ für alle a und b.

II. *Gesetz der Multiplikation.*

a) *Assoziatives Gesetz*: $a \cdot bc = ab \cdot c$.

III. *Distributivgesetze.*

a) $a \cdot (b+c) = ab + ac$.

b) $(b+c) \cdot a = ba + ca$.

Zusatz: Gilt auch für die Multiplikation das kommutative Gesetz:

II. b) $a \cdot b = b \cdot a$,

so heißt der Ring *kommutativ*. Vorläufig werden wir es hauptsächlich mit kommutativen Ringen zu tun haben.

ANEXO 4

Körper. Ein Ring heißt ein *Schiefkörper*, wenn

a) er mindestens ein von Null verschiedenes Element enthält,

b) die Gleichungen

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{l} ax = b, \\ ya = b \end{array} \right.$$

für $a \neq 0$ stets lösbar sind.

Ist der Ring außerdem kommutativ, so heißt er ein *Körper*[1] oder *Rationalitätsbereich* (englisch: field).

Genau wie bei Gruppen (Kap. 2) beweist man aus a) und b):

c) die Existenz eines links-Einselements e. Man löse nämlich für irgendein $a \neq 0$ die Gleichung $xa = a$ und nenne die Lösung e. Ist nun b beliebig, so löse man $ax = b$; es folgt

$$eb = eax = ax = b.$$

Ebenso folgt die Existenz eines rechts-Einselements, also *die Existenz eines Einselements* überhaupt.

Weiter folgt aus c) sofort:

d) die Existenz eines Linksinversen a^{-1} zu jedem $a \neq 0$ und ebenso die eines Rechtsinversen, also *die Existenz des inversen Elements* überhaupt.

Wie bei Gruppen zeigt man weiter, daß *aus c) und d) umgekehrt b) folgt.*

Aufgabe. 8. Man führe den Beweis durch.

Ein Schiefkörper hat keine Nullteiler; denn aus $ab = 0$, $a \neq 0$ folgt durch Multiplikation mit a^{-1} sofort $b = 0$.